Wykład 15

Nadprzewodnictwo

Nadprzewodnictwo jest stanem, który powstaje w wielu metalach, stopach, a również w niektórych półprzewodnikach. Zjawisko to było odkryte w 1911 roku przez Kamerlingh Onnesa podczas badania przewodnictwa rtęci. Rozważmy główne właściwości nadprzewodników, które wynikają z doświadczeń.

1) Podstawową właściwością stanu nadprzewodnictwa jest zerowy opór elektryczny. W nadprzewodnikach w pewnej temperaturze T_C zwanej *temperaturą krytyczną* opór zmniejsza się do zera, mimo obecności domieszek w próbce. Zanik oporu następuję w bardzo wąskim przedziale temperatur rzędu 0.05 K.

2) Stan nadprzewodnictwa w dość silnym polu magnetycznym znika. Wartość tego pola B_C nosi nazwę *pola krytycznego*, a zależność B_C od temperatury określa wzór

$$B_C = const \cdot \left[1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^2\right], \qquad T \le T_C \,. \tag{15.1}$$

3) Pole magnetyczne wewnątrz nadprzewodnika jest równe zeru. Efekt ten nazywa się *efektem Meissnera.*

4) Wkład w ciepło właściwe od elektronów przewodnictwa nadprzewodnika zależy od temperatury jako

$$C_v^{el} \approx const \cdot e^{-\Delta / kT}, \tag{15.2}$$

gdzie Δ - stała mniejsza niż energia Fermiego o 10^4 razy.

5) Temperatura krytyczna dla różnych izotopów danego pierwiastka zależy od masy izotopu M jako

$$T_C \approx const \cdot \frac{1}{\sqrt{M}} \,. \tag{15.3}$$

Efekt ten nazywa się *efektem izotopowym*.

6) Strumień pola magnetycznego przechodzącego przez pole powierzchni pierścienia nadprzewodzącego jest wielkością skwantowaną

$$\Phi = n \cdot \Phi_0 \,, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{15.4}$$

gdzie kwant strumienia magnetycznego Φ_0 wynosi

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2{,}0679 \cdot 10^{-15} \text{ Wb} . \qquad (15.5)$$

Kwant strumienia magnetycznego Φ_0 nazywa się *fluksonem*.

Fenomenologiczna teoria nadprzewodnictwa braci Londonów

Fenomenologiczna teoria nadprzewodnictwa, która jednak nie wyjaśnia mikroskopowego mechanizmu nadprzewodnictwa, była opracowana przez braci Londonów w 1935 roku. Z zerowego oporu właściwego nadprzewodnika wynika, że ruch elektronu w nadprzewodniku znajdującego się w polu elektrycznym $\vec{E}$ określa wzór

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} . \qquad (15.6)$$

Wzór (15.6) nie zawiera żadnych wyrazów odpowiedzialnych za opór ("tarcie" elektronów) próbki.

Korzystając ze wzoru (15.6) dla zmiany gęstości prądu z czasem otrzymujemy równanie

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d}{dt}(en\vec{v}) = en\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e^2 n}{m}\vec{E} = \frac{1}{\lambda_L}\vec{E} . \qquad (15.7)$$

Tu n - koncentracja elektronów, $\lambda_L = m / ne^2$.

Skorzystamy teraz z równań Maxwella

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \qquad (15.8a)$$

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} . \qquad (15.8b)$$

Po podstawieniu (15.7) do równania (15.8a) otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_L\left[\vec{\nabla} \times \vec{j}\right] + \vec{B}\right) = 0 . \qquad (15.9)$$

Ze wzoru (15.9) wynika, że

$$\lambda_L\left[\vec{\nabla} \times \vec{j}\right] + \vec{B} = const . \qquad (15.10a)$$

Fundamentalnym postulatem braci Londonów było założenie, że stała całkowania we wzorze (15.10) jest równa zeru, czyli

$$\lambda_L\left[\vec{\nabla} \times \vec{j}\right] + \vec{B} = 0 . \tag{15.10b}$$

Ponieważ potencjał wektorowy $\vec{A}$ pola elektromagnetycznego jest określony wzorem

$$\vec{B} = rot\vec{A} = \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right] , \tag{15.11}$$

ze wzoru (15.10b) otrzymujemy

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{j}\right] = -\frac{1}{\lambda_L}\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right]. \tag{15.12}$$

Skąd możemy założyć, że

$$\vec{j} = -\frac{1}{\lambda_L}\vec{A} . \tag{15.13}$$

Równania (15.7) i (15.13) są to dwa równania braci Londonów, które prawidłowo opisują zachowania nadprzewodnika w polu magnetycznym.

Zakładając, że w równaniu Maxwella (15.8b) pole elektryczne jest wolnozmienną funkcją czasu ($\dot{\vec{D}} = 0$), i nadprzewodnik jest substancją nie magnetyczną ($\mu = 1$) otrzymujemy

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{j} , \tag{15.14}$$

Z równań (15.11), (15.13) i (15.14) znajdujemy równanie na gęstość prądu w nadprzewodniku

$$\left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right]\right] - \mu_0\vec{j} = -\left(\lambda_L\left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{j}\right]\right] + \mu_0\vec{j}\right) = 0 . \tag{15.15}$$

Korzystając z tożsamości $\left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{C}\right]\right] = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) - \Delta\vec{C}$, ze wzoru (15.15) mamy

$$\left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{j}\right]\right] = \vec{\nabla} \cdot div\vec{j} - \Delta\vec{j} = -\frac{\mu_0}{\lambda_L}\vec{j} . \tag{15.16}$$

Ze względu na równanie ciągłości strumienia ładunku elektrycznego w nadprzewodniku musi być spełnione równanie

$$div\vec{j} = 0 ,$$

a zatem równanie (15.16) możemy zapisać w postaci

$$\Delta\vec{j} - \frac{\mu_0}{\lambda_L}\vec{j} = 0 \ . \tag{15.17}$$

W podobny sposób ze wzorów (15.14) i (15.10b) otrzymujemy

$$\left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{B}\right]\right] - \mu_0\left[\vec{\nabla} \times \vec{j}\right] = \left(\left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{B}\right]\right] + \frac{\mu_0}{\lambda_L}\vec{B}\right) = 0 \ . \tag{15.18}$$

Znów korzystając z tożsamości $\left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{C}\right]\right] = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) - \Delta\vec{C}$, ze wzoru (15.18) mamy

$$\left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{B}\right]\right] = \vec{\nabla} \cdot div\vec{B} - \Delta\vec{B} = -\frac{\mu_0}{\lambda_L}\vec{B} \ . \tag{15.19}$$

Ponieważ z równań Maxwella wynika, że $div\vec{B} = 0$, równanie (15.19) możemy zapisać w postaci

$$\Delta\vec{B} - \frac{\mu_0}{\lambda_L}\vec{B} = 0 \ . \tag{15.20}$$

Otrzymaliśmy więc dwa podobne równania na gęstość prądu $\vec{j}$ i pole magnetyczne $\vec{B}$ w nadprzewodniku

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{\Lambda_L^2}\vec{B} = 0 \ , \tag{15.21a}$$

$$\Delta\vec{j} - \frac{1}{\Lambda_L^2}\vec{j} = 0 \ . \tag{15.21b}$$

Tu

$$\Lambda_L^2 = \frac{\lambda_L}{\mu_0} = \frac{m}{ne^2\mu_0} \ . \tag{15.22}$$

Przypuśćmy, że pole $\vec{B}$ jest spolaryzowane równoległe do osi Ox, pokrywającej się z powierzchnią nadprzewodnika: $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$ i pole $\vec{B}$ zmienia się jedynie w kierunku osi Oz, prostopadłej do powierzchni nadprzewodnika. Wtedy zgodnie z (15.14)

$$\mu_0\vec{j} = rot\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial B_x(z)}{\partial z}\vec{e}_y \ , \tag{15.23}$$

a zatem z równań (15.21) otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 B_x(z)}{\partial z^2} - \frac{B_x(z)}{\Lambda_L^2} = 0 \ , \tag{15.24a}$$

$$\frac{\partial^2 j_y(z)}{\partial z^2} - \frac{j_y(z)}{\Lambda_L^2} = 0 \ . \tag{15.24b}$$

Rozwiązania równań (15.24) mają postać

$$B_x(z) = B_{x0} \exp(-\frac{z}{\Lambda_L}) \ , \tag{15.25a}$$

$$j_y(z) = j_{j0} \exp(-\frac{z}{\Lambda_L}) \ . \tag{15.25b}$$

Tu B_{x0} oznacza wartość pola magnetycznego na powierzchni próbki. Ze wzoru (15.25a) wynika, że pole magnetyczne w nadprzewodniku zanika wykładniczo, a szybkość zaniku pola określa *londonowska głębokość wnikania*

$$\Lambda_L = \sqrt{\frac{m}{ne^2\mu_0}} \ . \tag{15.26}$$

Dla typowych koncentracji elektronów wartość tego parametru jest rzędu 100 $\overset{0}{A}$ i dobrze zgadza się z danymi doświadczalnymi.

Ze wzoru (15.26b) wynika, że prąd nadprzewodzący płynie głównie po powierzchni nadprzewodnika zanikając wykładniczo w obszarze rzędu Λ_L. Właśnie pole magnetyczne związane z tym prądem nadprzewodzącym całkowicie kompensuje zewnętrzne pole magnetyczne. Udowodniliśmy, że wewnątrz nadprzewodnika prąd nadprzewodzący nie płynie i indukcja pola magnetycznego wewnątrz nadprzewodnika równa się zeru, a to właśnie jest efektem Meissnera.

Występująca w równaniu (15.26) koncentracja elektronów dotyczy jedynie elektronów odpowiedzialnych za nadprzewodnictwo. Ze ścisłej teorii nadprzewodnictwa Bardeena - Coopera - Schrieffera wynika, że koncentracja ta maleje, stając się równa zeru w temperaturze krytycznej. A więc przy zwiększaniu temperatury próbki pole zewnętrzne, oraz prądy nadprzewodzące wnikają do próbki coraz głębiej. W temperaturze krytycznej prądy nadprzewodzące znikają całkowicie. Znika również zjawisko Meissnera.

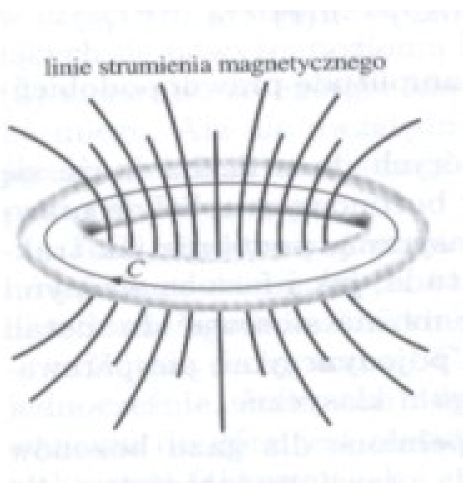
Pary Coopera. Elementy teorii nadprzewodnictwa Bardeena - Coopera - Schriefera

Teoria braci Londnów jest teorią fenomenologiczną, która nic nie mówi o mechanizmie fizycznym nadprzewodnictwa. Ważny krok w kierunku zrozumienia nadprzewodnictwa uczynił w 1956 roku Cooper, który zauważył, że gaz elektronów swobodnych staje się niestabilny, jeżeli przypuśćmy, że między elektronami działają słabe siły przyciągania. Pod wpływem tych sił przyciągania w gazie odosobnionych elektronów powstają związane między sobą pary elektronowe, które nazywają się *parami Coopera*. Późnej okazało się, że właśnie te pary Coopera są odpowiedzialne za nadprzewodnictwo, które powstaje w metalach. Wkrótce zostało wyjaśnione, że słabe siły przyciągania między elektronami to są siły, które powstają wskutek polaryzacji przez elektrony sieci krystalicznej. Krótko ten mechanizm powstawania siły przyciągania między elektronami można opisać w następujący sposób: poruszający się w sieci krystalicznej ujemnie naładowany elektron przyciąga do siebie dodatnie ładunki sieci. Powstała w taki sposób wokół elektronu "szuba" dodatnie naładowana przyciąga do siebie inne elektrony. A zatem odkształcenie sieci dodatnie naładowanych węzłów jest przyczyną pojawienia się słabego przyciągania ujemnych ładunków elektronów! Z kwantowego punktu widzenia opisane tu oddziaływanie można opisać jako emitowanie przez jeden elektron *fononu* i pochłanianie tego fonony przez drugi elektron. Fonony takie noszą nazwę *fononów wirtualnych* ponieważ energia dla takich procesów emitowania i pochłanianie fononu *nie jest zachowana*. W wyniku takiej wymiany wirtualnym fononem o wektorze falowym $\vec{q}$ elektrony o wektorach falowych $\vec{k}_1$ i $\vec{k}_2$ przechodzą w stany z wektorami falowymi $\vec{k}_1 - \vec{q}$ i $\vec{k}_2 + \vec{q}$. Ilość tych emitowanych i pochłanianych fononów, wskutek czego powstają pary Coopera, maksymalna kiedy elektrony mają przeciwnie skierowane do siebie pędy i spiny. Pary Coopera tworzą zespół cząstek z wypadkowym spinem równym zero, tj. para Coopera ma wiele wspólnych cech z bozonem. Dla bozonów zasada Pauliego nie jest słuszna, a zatem przy przejściu w stan nadprzewodzący następuję kondensacja par Coopera (zjawisko kondensacji Bozego -Einsteina) i wszystkie pary Coopera obsadzają ten sam stan kwantowy i mają taką samą funkcję falową. Kondensacja Bozego-Einsteina par Coopera powoduje, że te pary mogą poruszać się wzdłuż przewodnika bez rozpraszania (bez oporu), a właśnie to oznacza, że przewodnik przechodzi w stan nadprzewodzący.

Kwantowanie strumienia pola magnetycznego

Doświadczalnie stwierdzone, że całkowity strumień przechodzący przez nadprzewodzący pierścień może przybierać tylko skwantowane wartości, które są całkowitymi wielkościami kwantu strumienia hc/q, gdzie $q = -2e$. Kwantowanie strumienia magnetycznego jest pięknym przykładem makroskopowego zjawiska kwantowego, w którym spójność fazowa nośników prądu w stanie nadprzewodzącym rozciąga się na cały pierścień.

Udowodnimy kwantowanie strumienia pola magnetycznego rozważając pierścień z nadprzewodzącego materiału (rys.15.1).



Rys.15.1.Kontur całkowania C gradientu fazy wewnątrz pierścienia nadprzewodzącego

W polu magnetycznym prędkość cząstek określa wzór (patrz (14.1)

$$\vec{v} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right) = \frac{1}{m}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right). \quad (15.27)$$

Przypuśćmy, że koncentracja par Coopera wynosi $n = \psi^*\psi$ = stała. W temperaturze $T = 0$ koncentracja par n równa się połowie koncentracji elektronów w paśmie przewodnictwa. Zapiszmy funkcję falową pary w postaci

$$\psi = \sqrt{n} \cdot e^{i\theta(\vec{r})}, \quad (15.28)$$

gdzie fazę $\theta(\vec{r})$ funkcji (15.28) otrzymamy dalej.

Korzystając z (15.27) i (15.28) dla strumienia par otrzymujemy

$$\psi^*\vec{v}\psi = \frac{n}{m}\left(\hbar\vec{\nabla}\theta - q\vec{A}\right) \quad (15.29)$$

Stąd dla gęstości prądu elektrycznego mamy

$$\vec{j} = q\psi^*\vec{v}\psi = \frac{nq}{m}\left(\hbar\vec{\nabla}\theta - q\vec{A}\right). \quad (15.30)$$

Efekt Meissnera powoduje, że wewnątrz nadprzewodnika $\vec{B} = 0$ i $\vec{j} = 0$. A zatem ze wzoru (15.30) mamy

$$\vec{\nabla}\theta = \frac{q}{\hbar}\vec{A} \ . \qquad (15.31)$$

Rozważmy teraz zmianę fazy funkcji falowej pary Coopera, która powstaje przy jednorazowym obiegnięciu pierścienia wzdłuż konturu C (rys.15.1). Ponieważ

$$\oint \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{l} = \theta_2 - \theta_1 \equiv \Delta\theta \ , \qquad (15.32a)$$

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_S \left(rot\vec{A}\right)\cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = \Phi \ . \qquad (15.32b)$$

Tu skorzystaliśmy z twierdzenia Stokesa i z równości $rot\vec{A} = B$.

Biorąc pod uwagę wzory (15.32) i (15.31) znajdujemy

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{q}{\hbar}\Phi \ , \qquad (15.33)$$

W równaniu (15.32a) θ_1 i θ_2 są fazy funkcji falowej pary Coopera w tym samym miejscu. A zatem, żeby funkcja falowa była wielkością jednoznaczną, musimy przyjąć, że

$$\Delta\theta = 2\pi\cdot n \ , \qquad (15.34)$$

gdzie n jest liczbą całkowitą.

Biorąc pod uwagę wzory (15.32)-(15.34), ze wzoru (15.31) znajdujemy ($q = 2e$)

$$\Phi = 2\pi n\frac{\hbar}{q} \equiv n\frac{h}{q} = n\cdot 2{,}0678\cdot 10^{-15}T\cdot m^2 \ . \qquad (15.35)$$

A zatem skwantowany strumień magnetyczny w pierścieniu nadprzewodzącym jest całkowitą wielkością kwanta strumienia $\Phi_0 = h/2e$, który nazywa się *fluksonem*.

Efekt Josephsona

Efekt Josephsona jest związany z tunelowaniem par Coopera przez cienką warstwę izolatora oddzielającej jeden nadprzewodnik od drugiego. Złącze takie nazywają *złączem Josephsona*.

Rozważmy uproszczoną teorię efektu Josephsona przyjmując, że złącze wykonano z jednakowych nadprzewodników i że różnica potencjałów między nimi jest równa zeru. Udowodnimy, że przez złącze może płynąć prąd nawet bez zewnętrznego pola elektrycznego.

Założmy znów, że funkcje falowe par Coopera po jednej i drugiej stronie złącza mają postać

$$\psi_1 = \sqrt{n_1} \cdot e^{i\theta_1} , \qquad \psi_2 = \sqrt{n_2} \cdot e^{i\theta_2} . \tag{15.36}$$

Tu n_1 i n_2 są koncentracji par Coopera po obu stronach złącza; θ_1 i θ_2 fazy funkcji falowych par Coopera. Przypuśćmy również, że funkcje falowe ψ_1 i ψ_2 są rozwiązaniami układu równań Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hbar T \psi_2 , \qquad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hbar T \psi_1 . \tag{15.37}$$

W równaniach (15.37) $\hbar T$ określa energię sprężenia par Coopera przez barierę izolatora. T ma wymiar częstości i jest miarą tunelowania pary Coopera przez warstwę izolatora. Jeżeli $T = 0$ nie ma sprężenia między funkcjami ψ_1 i ψ_2, czyli nie ma tunelowania. Po podstawieniu (15.36) do (15.37) otrzymujemy

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{1}{2} n_1^{-1/2} \frac{\partial n_1}{\partial t} e^{i\theta_1} + i\sqrt{n_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} e^{i\theta_1} = -iT\sqrt{n_2} e^{i\theta_2} , \tag{15.38}$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{1}{2} n_2^{-1/2} \frac{\partial n_2}{\partial t} e^{i\theta_2} + i\sqrt{n_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} e^{i\theta_2} = -iT\sqrt{n_1} e^{i\theta_1} . \tag{15.39}$$

Mnożąc równanie (15.38) przez $\sqrt{n_1} e^{-i\theta_1}$, a równanie (15.39) przez $\sqrt{n_2} e^{-i\theta_2}$ otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_1}{\partial t} + i n_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -iT\sqrt{n_1 n_2} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} , \tag{15.40a}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_2}{\partial t} + i n_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -iT\sqrt{n_1 n_2} e^{-i(\theta_2 - \theta_1)} . \tag{15.40b}$$

Przyrównując części rzeczywiste i urojone równań (15.40), znajdujemy

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\frac{\partial n_2}{\partial t} = 2T\sqrt{n_1 n_2} \cdot \sin\delta , \tag{15.41a}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{n_2}{n_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -T\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/2} cos\delta , \tag{15.41b}$$

gdzie $\delta \equiv \theta_2 - \theta_1$.

Jeżeli mamy złącze jednakowych nadprzewodników i $n_1 \cong n_2 \equiv n$, to z równania (15.41b) znajdujemy

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\partial \theta_2}{\partial t} . \tag{15.42}$$

Prąd J płynący z obszaru 1 do obszaru 2 proporcjonalny do $\partial n_2 / \partial t = -\partial n_1 / \partial t$. Biorąc pod uwagę (15.41a) znajdujemy

$$J = J_0 \sin\delta \equiv J_0 \sin(\theta_2 - \theta_1) , \tag{15.43}$$

gdzie

$$J_0 \sim 2T\sqrt{n_1 n_2} . \tag{15.44}$$

Ze wzoru (15.43) widzimy, że stały prąd par Coopera przez dielektryczne złączę, który płynie przy zerowym napięciu na złączu, zależy tylko od różnicy faz par Coopera w dwóch obszarach. Amplituda prądu J_0 jest proporcjonalna do energii sprzężenia T. Efekt ten nosi nazwę *stałoprądowego zjawiska Josephsona*.

Różnicę faz par Coopera można zmieniać przykładając do dielektrycznej warstwy złącza stałe napięcie V. Rozważmy zachowanie złącza przy niezerowym napięciu na złączu.

W tym przypadku para Coopera tunelująca przez złącze napotyka różnice energii potencjalnej qV, gdzie $q = -2e$. Możemy przyjąć, że para po jednej stronie ma energię potencjalną $-eV$, a po drugiej stronie złącza eV. Wtedy równania Schrödingera dla dwóch obszarów przyjmują postać

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hbar T \psi_2 - eV\psi_1 , \qquad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hbar T \psi_1 + eV\psi_2 . \tag{15.45}$$

Znów po podstawieniu (15.41) do (15.45) otrzymujemy

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{1}{2} n_1^{-1/2} \frac{\partial n_1}{\partial t} e^{i\theta_1} + i\sqrt{n_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} e^{i\theta_1} = -iT\sqrt{n_2} e^{i\theta_2} + i(eV/\hbar) n_1^{1/2} e^{i\theta_1} , \tag{15.46}$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{1}{2} n_2^{-1/2} \frac{\partial n_2}{\partial t} e^{i\theta_2} + i\sqrt{n_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} e^{i\theta_2} = -iT\sqrt{n_1} e^{i\theta_1} - i(eV/\hbar) n_2^{1/2} e^{i\theta_2} . \tag{15.47}$$

Mnożąc równanie (15.46) przez $\sqrt{n_1} e^{-i\theta_1}$, a równanie (15.47) przez $\sqrt{n_2} e^{-i\theta_2}$ otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_1}{\partial t} + i n_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = i(eV/\hbar) n_1 - iT\sqrt{n_1 n_2} e^{i\delta} , \tag{15.48a}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_2}{\partial t} + i n_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -i(eV/\hbar) n_2 - iT\sqrt{n_1 n_2} e^{-i\delta} . \tag{15.48b}$$

Przyrównując części rzeczywiste i urojone równań (15.48) znajdujemy

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = 2T\sqrt{n_1 n_2} \sin\delta , \tag{15.49a}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = (eV/\hbar) - T\sqrt{n_2/n_1}\cos\delta \quad , \tag{15.49b}$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -2T\sqrt{n_1 n_2}\sin\delta \quad . \tag{15.50a}$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -(eV/\hbar) - T\sqrt{n_1/n_2}\cos\delta \quad . \tag{15.50b}$$

Przyjmując znów, że $n_1 \cong n_2$ ze wzorów (15.49b) i (15.50b) otrzymujemy

$$\frac{\partial(\theta_2 - \theta_1)}{\partial t} \equiv \frac{\partial \delta}{\partial t} = -2eV/\hbar \quad . \tag{15.51}$$

Całkując równanie (15.51) znajdujemy

$$\delta(t) = \delta(0) - 2eVt/\hbar \quad . \tag{15.52}$$

A zatem stałe napięcie, przyłożone do złącza, powoduje, że różnica faz $\delta = \theta_2 - \theta_1$ funkcji falowych pary Coopera w dwóch obszarach staje się zależną od przyłożonego napięcia. Podstawiając (15.52) do wzoru (15.43) otrzymamy wzór na prąd nadprzewodzący przez złącze

$$J = J_0 \sin\delta \equiv J_0 \sin\left(\delta(0) - 2eVt/\hbar\right) \quad , \tag{15.53}$$

Ze wzoru (15.53) wynika, że prąd nadprzewodzący oscyluje z częstością

$$\omega = 2eV/\hbar \quad . \tag{15.54}$$

Te oscylacje prądu noszą nazwę *zmiennoprądowym zjawiskiem Josephsona*. Przy $V = 1\mu V$ częstość oscylacji wynosi 483,6 MHz.

Interferometr kwantowy. Squid (skwid)

Rozważmy dwa złącza Josephsona połączone równolegle, tak jak pokazano na rys. 15.2. Niech różnica faz w punktach 1 i 2 liczona wzdłuż drogi (a) wynosi δ_a, a liczona wzdłuż drogi (b) – (δ_b). Bez przyłożonego zewnętrznego pola magnetycznego te dwie fazy muszą być sobie równe. Umieścimy teraz wewnątrz obwodu solenoid prostopadły do płaszczyzny obwodu. Biorąc pod uwagę wzór (15.33) dla zmiany fazy $\theta_2 - \theta_1$ po obiegnięciu całego obwodu mamy

$$\theta_2 - \theta_1 = \delta_b - \delta_a = (2e/\hbar)\Phi \quad , \tag{15.55}$$

gdzie Φ - strumień magnetyczny przenikający przez obwód.

We wzorze (15.55) znak (-) przy δ_a związany jest z tym, że kierunek obiegu górnego złącza jest przeciwny do kierunku obiegu dolnego złącza.

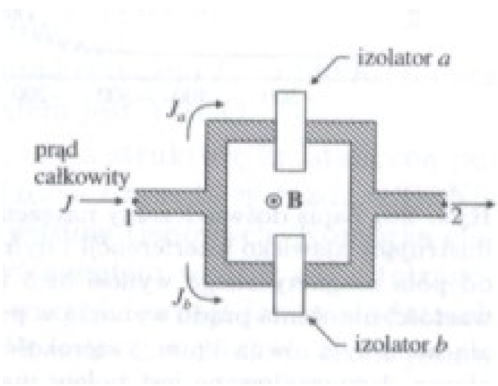


Рис.15.2. Dwa złącza Josephsona

Na podstawie wzoru (15.55) możemy zapisać

$$\delta_b = \delta_0 + (e/\hbar)\Phi \ , \qquad (15.56a)$$

$$\delta_a = \delta_0 - (e/\hbar)\Phi \ , \qquad (15.56b)$$

Natężenie prądu płynącego między punktami 1 i 2 jest sumą prądów płynących wzdłuż górnego i dolnego złącz. Natężenie prądu płynącego przez każde ze złącz określa wzór (15.43). A zatem

$$J_{cakow} = J_0\left[sin\left(\delta_0 + \frac{e}{\hbar}\Phi \right) + sin\left(\delta_0 - \frac{e}{\hbar}\Phi \right)\right] = 2J_0 \, sin\delta_0 \cdot cos\left(\frac{e\Phi}{\hbar} \right) . \qquad (15.57)$$

Na rys.15.3 jest pokazana periodyczność prądu płynącego między punktami 1 i 2 dla dwóch różnych wartości indukcji pola magnetycznego.

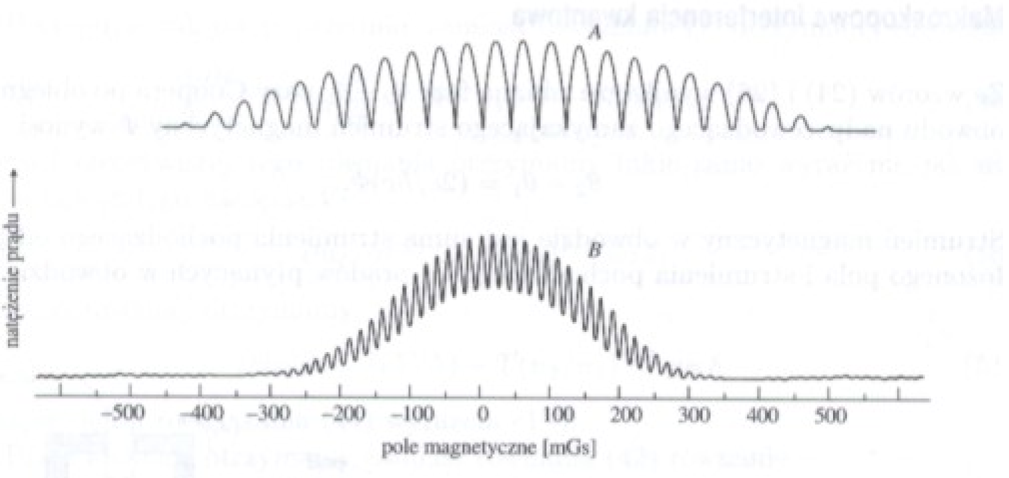


Рис.15.3.

Rys.15.3. Oscylacje natężenia prądu dla dwóch interferometrów kwantowych A i B

Oscylacji pokazane na rys.15.3 są skutkiem interferencji fal par Coopera. Interferencja kwantowa w nadprzewodnikach jest szeroko wykorzystywana w urządzeniach do pomiaru słabych pól magnetycznych (skwidy). W tych urządzeniach wykorzystuje się właściwość interferometru nadprzewodzącego reagować na dość słabe zmiany indukcji zewnętrznego pola magnetycznego.