

## Wykład 14

---

### Oscylacje kwantowe w polu magnetycznym

W polu magnetycznym obserwują się nowe nadzwyczajne efekty fizyczne, związane z kwantowaniem ruchu nośników ładunku w polu magnetycznym. W tym i następnym wykładzie rozważmy efekty kwantowe spowodowane wpływem pola magnetycznego na ruch ładunków.

#### Poziomy Landaua

W mechanice klasycznej uogólniony pęd naładowanej cząstki ma postać

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A} , \quad (14.1)$$

gdzie  $\vec{A}$  - potencjał wektorowy, określony jako

$$\vec{B} = [\vec{\nabla} \times \vec{A}] . \quad (14.2)$$

W mechanice kwantowej odpowiedni uogólniony operator pędu wynosi

$$\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla} + q\vec{A} , \quad (14.3)$$

a zatem hamiltonian swobodnego elektronu ( $q \equiv -e$ ) w jednorodnym polu magnetycznym można zapisać jako

$$H = T + U = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 , \quad (14.4)$$

gdzie wybraliśmy energię potencjalną  $U = 0$ , ponieważ zakładamy, że oprócz pola magnetycznego na cząstkę nie działa żadne pole potencjalne. Jeżeli założymy, że pole magnetyczne jest polem jednorodnym i skierowane wzdłuż osi  $z$ , to potencjał wektorowy, zgodnie z (14.2), ma postać

$$\vec{A} = -yB\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} . \quad (14.5)$$

Po podstawieniu (14.5) do (14.4) hamiltonian przyjmuje postać

$$H = \frac{1}{2m} [(p_x + eyB)^2 + (p_y^2 + p_z^2)] . \quad (14.6)$$

Biorąc pod uwagę (14.6), zapiszemy równanie Schrödingera

$$\frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + 2eyBp_x + e^2B^2y^2) \cdot \psi = E\psi . \quad (14.7)$$

Przepiszmy równanie (14.7) w postaci

$$\left[ \frac{p^2}{2m} + \frac{e^2 B^2}{2m} \left( y + \frac{p_x}{eB} \right)^2 - \frac{p_x^2}{2m} \right] \psi = E\psi . \quad (14.8)$$

Zwróćmy uwagę, że operatory  $p_x$  i  $p_z$  komutują z operatorem Hamiltona. Stąd wynika, że własne funkcje  $\psi$  opisują wspólne własne stany operatorów  $H$ ,  $p_x$  i  $p_z$ . A zatem, własne funkcje  $\psi$  możemy szukać w postaci

$$\psi = e^{i(k_x x + k_z z)} f(y) . \quad (14.9)$$

Po podstawieniu (14.9) do (14.8) otrzymujemy

$$\left[ \frac{p_y^2}{2m} + \frac{e^2 B^2}{2m} \left( y + \frac{\hbar k_x}{eB} \right)^2 \right] f(y) = \left( E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right) f(y) . \quad (14.10)$$

Biorąc pod uwagę, że pole magnetyczne  $B$  jest jednorodnym, wprowadźmy następujące zamiany

$$K \equiv \frac{e^2 B^2}{m}, \quad y_0 \equiv - \frac{\hbar k_x}{eB} . \quad (14.11)$$

Wtedy człon w nawiasach po lewej stronie równania (14.10) przyjmuje postać hamiltonianu oscylatora harmonicznego

$$\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} K (y - y_0)^2 . \quad (14.12)$$

Wprowadzając częstotliwość, która nosi nazwę **częstości cyklotronowej**

$$\Omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \equiv \frac{eB}{m} , \quad (14.13)$$

dla wartości własnych hamiltonianu oscylatora harmonicznego możemy zapisać

$$E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = \hbar \Omega \left( n + \frac{1}{2} \right) . \quad (14.14)$$

Poziomy określone wzorem (14.14) noszą nazwę **poziomów Landaua**.

Ze wzoru (14.14) otrzymujemy

$$E = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar \Omega \left( n + \frac{1}{2} \right) . \quad (14.15)$$

Wzór (14.15) zawiera dwa człony. Pierwszy człon odpowiada energii swobodnego ruchu elektronu wzdłuż osi  $z$ . Przypomnijmy, że jeżeli pole magnetyczne jest przyłożone wzdłuż osi  $z$ , to ze strony pola nie działa żadna siła w tym kierunku, zanedbując oczywiście stosunkowo słabe oddziaływanie spinowego momentu magnetycznego elektronu z polem. Dla tego ruch elektronu wzdłuż osi  $z$  jest ruchem swobodnym, a energia odpowiadająca temu ruchowi jest wprost energią kinetyczną ruchu w kierunku osi  $z$ . Drugi wyraz odpowiada energii oscylatora harmonicznego i opisuje ruch cząstki w płaszczyźnie  $x-y$ . Z punktu widzenia fizyki klasycznej ruch naładowanej cząstki w polu magnetycznym zachodzi po spirali. Istotnie, na naładowaną cząstkę w jednorodnym polu magnetycznym działa siła Lorentza skierowana prostopadle do prędkości cząstki, a zatem przyspieszenie będzie też skierowane prostopadle do prędkości. A stąd wynika, że pole magnetyczne „zastawia” cząstkę poruszać się po orbicie spiralnej.

Dozwolone funkcje falowe dla elektronu określa wzór (14.9). Postać funkcji  $f(y)$  znajduje się z równania (14.10) i są to funkcje oscylatora harmonicznego. A zatem własne funkcje naładowanej cząstki w polu magnetycznym wynoszą

$$\psi \sim e^{ik_x x} e^{ik_z z} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}, \quad (14.16)$$

gdzie  $H_n(\xi)$  - wielomiany Hermite'a, a  $\xi$  określa wzór

$$\xi = \sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}} (y - y_0). \quad (14.17)$$

### Gęstość stanów elektronowych w polu magnetycznym

Rozważmy teraz efekt przyłożonego pola magnetycznego na gęstość stanów elektronowych. Gęstość stanów układu trójwymiarowego określa wzór

$$g(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{2V}{(2\pi)^3} \frac{dk_x dk_y dk_z}{dE}, \quad (14.18)$$

gdzie mnożnik 2 w liczniku uwzględnia spin elektronu. Jeżeli zanedbujemy oddziaływaniami spinowego momentu magnetycznego z zewnętrznym polem, to na ruch elektronu wzdłuż osi  $z$  pole magnetyczne nie wpływa. Załóżmy, że kryształ jest ograniczony i ma wymiary  $L_x, L_y$  i  $L_z$ . Z warunków Borna-Karmana wynika, że ilość stanów dla określonej wartości  $k_z$  wynosi

$$N_z dk_z = 2 \frac{L_z}{2\pi} dk_z, \quad (14.19)$$

gdzie mnożnik 2 pochodzi od tego, że  $k_z$  może być dodatnim i ujemnym. Liczba stanów  $N_{xy}$  w płaszczyźnie prostopadłej do pola magnetycznego, znajdujących się pomiędzy  $k_r$  i  $k_r + dk_r$ , określa wzór

$$N_{xy} = 2\pi k_r dk_r \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2}, \quad (14.20)$$

gdzie  $k_r$  - wartość rzutu  $k$ - wektora na płaszczyznę prostopadłą polu magnetycznemu. Przypomnijmy, że odległość między poziomami Landaua jest równa  $\hbar\Omega$ . A zatem powinniśmy mieć

$$\frac{d(\hbar^2 k_r^2 / 2m)}{dk_r} dk_r = \hbar\Omega. \quad (14.21)$$

Różniczkując w (14.21) i korzystając z (14.13) otrzymujemy

$$\frac{\hbar^2 k_r}{m} dk_r = \frac{\hbar e B}{m}. \quad (14.22)$$

Wyliczając  $k_r dk_r$  z (14.22) i podstawiając wynik do (14.20) znajdujemy

$$N_{xy} = 2\pi \frac{eB}{\hbar} \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} = \frac{eB}{\hbar} \frac{L_x L_y}{2\pi}. \quad (14.23)$$

Gęstość stanów otrzymujemy jako iloczyn (14.19) i (14.23), która po przekształceniu do energii jest równa

$$g(E_z) dE_z = V \sum_n \frac{eB \sqrt{2m}}{(2\pi\hbar)^2} \frac{dE_z}{\sqrt{E_z}}, \quad (14.24)$$

gdzie  $V = L_x L_y L_z$  - objętość kryształu.

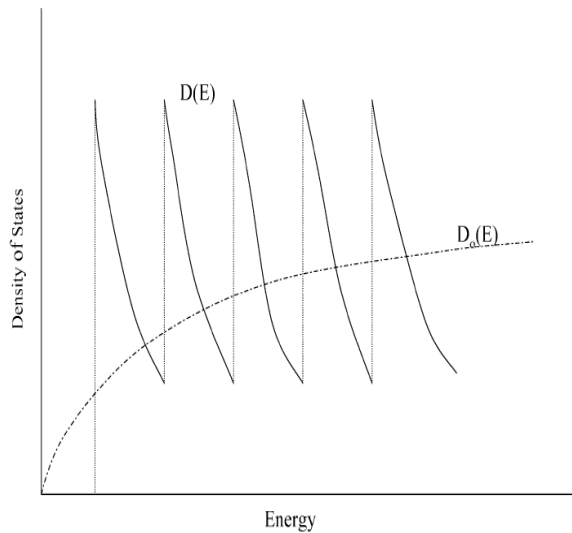
Ze wzoru (14.15) wynika, że  $E_z$  możemy zapisać jako

$$E_z \equiv \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = E - \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\Omega. \quad (14.25)$$

Podstawiając wzór (14.25) do wzoru (14.24), znajdujemy dla gęstości stanów trójwymiarowego układu w polu magnetycznym następujący wzór

$$g(E) = V \sum_n \frac{eB\sqrt{2m}}{(2\pi\hbar)^2 \sqrt{E - \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2}\right)}}. \quad (14.26)$$

Ze wzoru (14.26) wynika, że w funkcji gęstości stanów  $g(E)$  pojawiają się osobliwości (gwałtownie rośnie gęstość stanów wskutek zerowania się mianownika), gdy energia staje się równą energii poziomu Landaua.



Rys.14.1. Gęstość stanów dla trójwymiarowej systemu bez zewnętrznego pola magnetycznego (krzywa kreska-kropka)  $D_0(E)$  i przy istnieniu zewnętrznego pola magnetycznego  $D(E)$  (krzywa ciągła)

Interesującym jest porównanie dozwolonych stanów w przypadku istnienia zewnętrznego pola magnetycznego z przypadkiem braku pola. Dla trójwymiarowego gazu elektronów powierzchnia Fermiego jest prosto kulą. Zewnętrzne pole magnetyczne zmienia stany energetyczne układu. Ponieważ pole magnetyczne nie zmienia ruch wzdłuż osi  $z$ , ruch w tym kierunku jest taki sam jak ruch swobodnej cząstki i opisywany jest w (14.15) członem zawierającym  $k_z$ .

Energia ruchu elektronu w płaszczyźnie  $xy$ , jak wynika z przeprowadzonej wyżej analizy jest skwantowana i wynosi  $\hbar\Omega (n + 1/2)$ . Dozwolone stany w  $k$ -przestrzeni wzdłuż kierunków  $k_x$  i  $k_y$  znajdują się na okręgach o promieniu

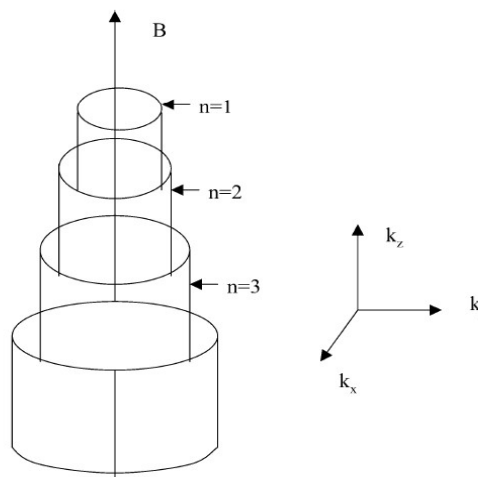
$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (14.27)$$

W rzeczywistych układach, poszerzenie energetyczne eliminuje tę osobliwość, chociaż okresowość zachowania gęstości stanów pozostaje.

Z porównania wzoru (14.26) ze wzorem (4.19) widzimy, że funkcja opisująca gęstość stanów elektronowych jest podobna do funkcji gęstości stanów drutu kwantowego. A zatem pole magnetyczne skierowane wzdłuż osi  $z$  powoduje, że elektrony, podobnie do ich ruchu w układzie jednowymiarowym, mogą swobodnie poruszać się tylko w jednym kierunku – wzdłuż kierunku pola magnetycznego.

A zatem dozwolone stany znajdują się na powierzchniach cylindrów wzdłuż osi  $k_z$ , jak to jest pokazane na rys.14.2. Jak widać z rys.14.2 wewnątrz walca z  $n = 0$  nie ma dozwolonych stanów. A zatem, zgodnie z rys.14.1 gęstość stanów musi być równa zero dla energii mniejszych niż  $\hbar\Omega / 2$ .

Gęstość stanów wzrasta gwałtownie, gdy energia staje się równej energii odpowiadającej pierwszemu cylindrowi. Dalej gęstość stanów zmniejsza się dopóki nie zostanie dotknięty nowy walec. W przypadku trójwymiarowym bez pola magnetycznego gęstość stanów rośnie jako pierwiastek kwadratowy z  $E$ , co pokazano jest na rys. 14.1 za pomocą funkcji  $D_0(E)$ . Oczywiście, że ogólna liczba stanów dla dwóch przypadków – bez pola magnetycznego i z polem, musi pozostać taka sama.



Rys.14.2. Efekt przyłożonego wzdłuż osi  $z$  pola magnetycznego. Dozwolone energie znajdują się na koncentrycznych cylindrach z osiami równoległymi do pola magnetycznego

### Stopień zwyrodnienia poziomów Landaua

Znajdziemy stopień zwyrodnienia poziomu Landaua, czyli jaką ilość stanów elektronowych zawiera poziom Landaua. Przypomnijmy, że zgodnie z zasadą Pauliego w tym samym stanie kwantowym nie mogą znajdować dwa elektrony. A zatem, liczba dozwolonych stanów ogranicza liczbę elektronów, które obsadzają zbiór stanów. Z gęstości stanów pokazanych na rys.14.2 widno, że między cylindrami istnieją zabronione przerwy energetyczne. Dlatego, po obsadzeniu koniecznej liczby stanów każdego cylindra zachodzi skok w energii i stają się dostępne do obsadzenia kolejne stany. Ogólna liczba stanów dostępnych na każdym poziomie Landaua może być obliczona w następujący sposób. Będziemy zakładać słuszność periodycznych granicznych warunków dla systemu (warunek Borna-Karmana). Przypomnimy, że jeżeli założymy, że kryształ jest sześcianiem z długością ścian  $L$ , to okresowe graniczne warunki Borna-Karmana oznaczają, że

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + L, y + L, z + L) . \quad (14.28)$$

Rozważmy teraz ruch swobodny cząstki w kierunku osi  $z$  (w kierunku przyłożonego pola magnetycznego). Po podstawieniu funkcji falowej swobodnego elektronu, zależną od  $z$  ( $\psi \sim \exp(ik_z z)$ ), z warunku  $\psi(x, y, z) = \psi(x, y, z + L)$  otrzymujemy

$$k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad (14.29)$$

gdzie  $n_z$  jest wielkością całkowitą. Parametr  $|y_0| = |\hbar k_x|/eB$  (14.11) musi znajdować się między 0 i  $L$ , ponieważ ten parametr jest związany ze środkiem okręgu ruchu klasycznego i nie może wychodzić za granicy kryształu. A zatem maksymalna wartość  $y_0$  jest równa  $L$ . Biorąc pod uwagę wzór (14.29) znajdujemy

$$L = \frac{\hbar|k_x|}{eB} = \frac{\hbar n_x}{eBL}. \quad (14.30)$$

Maksymalna liczba stanów na jeden poziom Landaua (zwyrodnienie poziomu Landaua) otrzymujemy rozwiązując (14.30) względem  $n_x$

$$n_x = \frac{eB}{h} L^2. \quad (14.31)$$

Dzieląc (14.31) przez  $L^2$  znajdujemy maksymalną liczbę stanów na jednostkę pola powierzchni  $s$

$$s = \frac{n_x}{L^2} = \frac{eB}{h}. \quad (14.32)$$

Ze wzoru (14.32) wynika, że zwyrodnienie poziomu Landaua (liczba dostępnych do obsadzenia stanów albo „pojemność” poziomu Landaua) jest wprost proporcjonalna do indukcji pola magnetycznego  $B$ .

### Oscylacje Shubnikova - de Haasa

Efekt Shubnikova–de Haasa jest związany z oscylacjami oporu (magnetooporu) od wielkości odwrotnej do indukcji zewnętrznego pola magnetycznego ( $1/B$ ). Oscylacje Shubnikowa – de Haasa rejestrują się w zwyrodniałych półprzewodnikach w niskich temperaturach. Dla obserwacji efektu Shubnikowa-de Haasa muszą być spełnione trzy podstawowe warunki.

- Gaz elektronowy musi być zwyrodniały, czyli

$$\mu \gg kT.$$

Ten warunek można spełnić silnie domieszkując półprzewodnik donorami. Wtedy poziom Fermiego znajduje się w pasmie przewodnictwa półprzewodnika, a średnia odległość między

donorami  $1/N_D^{1/3}$  ( $N_D$  - koncentracja donorów) jest mniejsza od promienia orbity Bohra  $r_B$  w kryształach

$$N_D^{-1/3} < r_B = \epsilon_0 \epsilon \frac{m}{m^*} r_B(^1H).$$

Tu  $r_B(^1H) = 0.53 \text{ \AA}$  – promień Bohra dla atomu wodoru;  $m$  - masa swobodnego elektronu,  $m^*$  - masa efektywna elektronu.

- Odległość między poziomami Landaua  $\hbar\Omega$  musi być większa niż szerokość każdego z poziomów Landaua  $\Delta E \cong h/\tau$  ( $\tau$  - czas życia elektronu na poziomie)

$$\Omega \tau \gg 1.$$

Warunek ten może być spełniony tylko w silnym polu magnetycznym.

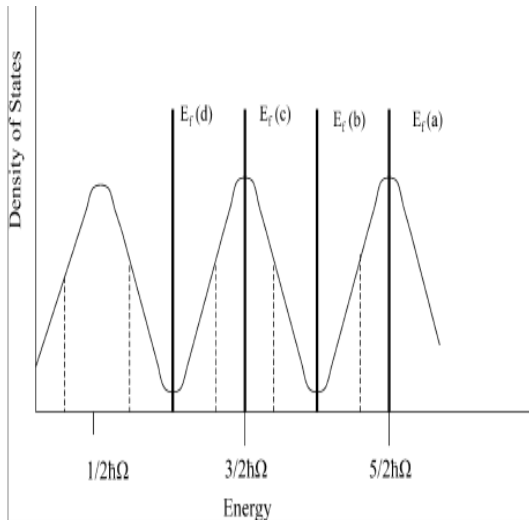
- Ciepłe poszerzenie poziomów Landaua  $\Delta E \cong kT$  musi być znacznie mniejszym od odległości między poziomami Landaua  $\hbar\Omega$

$$\hbar\Omega \gg kT.$$

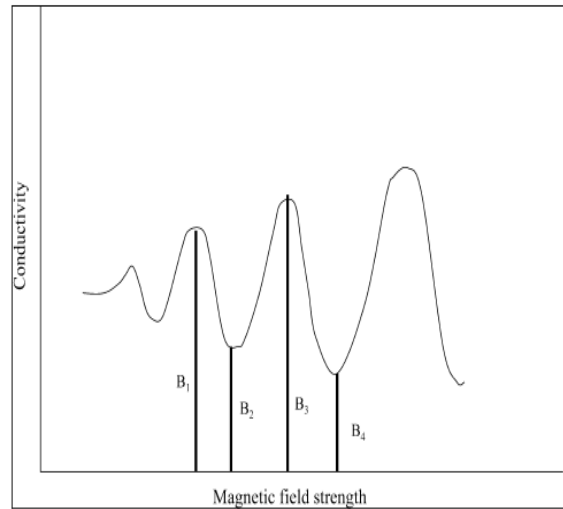
Warunek ten jest spełniony tylko w niskich temperaturach.

Powstawanie oscylacji Shubnikowa - de Haasa można zrozumieć rozważając zachowanie się poziomu Fermiego w polu magnetycznym. Załóżmy, że na początku poziom Fermiego znajduje się wewnątrz poziomu Landaua  $E_f(a)$  (rys.14.3). Ponieważ poziom Fermiego leży w częściowo obsadzonym paśmie energetycznym, ruchliwość jest stosunkowo wysoka (linia  $B_1$  na rys.14.4). Przy zwiększeniu indukcji pola magnetycznego, zgodnie ze wzorem (14.32), zwiększa się ilość dostępnych stanów poniżej poziomu Fermiego. Elektrony zaczynają obsadzać te „puste” stany, a w wyniku tego poziom Fermiego przesuwa się w głąb niższego względem energii pasma (poziom  $E_f(b)$  na rys.14.3), gdzie przewodnictwo jest mniejsze (linia  $B_2$  na rys.14.4). Kolejne zwiększenie indukcji pola magnetycznego powoduje następne przesunięcie poziomu Fermiego w stronę niższego poziomu Landaua (poziom  $E_f(c)$  na rys.14.3). Gdy poziom Fermiego popada wewnątrz kolejnego poziomu Landaua (poziom  $E_f(c)$  na rys.14.3), pojawiają się puste nieobsadzone stany energetyczne i zwiększa się przewodnictwo (linia  $B_3$  na rys.14.4). A zatem, przewodnictwo wykazuje oscylacje przy zmianie indukcji pola magnetycznego. Jak pokazuje rys.14.4, amplituda oscylacji wzrasta przy zwiększeniu indukcji pola magnetycznego.





Rys.14.3. Gęstość stanów dwuwymiarowego układu w polu magnetycznym. Pokazane są również położenie poziomu Fermiego  $E_f$  dla różnych wartości indukcji pola magnetycznego:  $a$  - najmniejsza indukcja pola;  $d$  - największa indukcja. Przy zwiększeniu indukcji pola poziom Fermiego przesuwa się w stronę mniejszych energii.



Rys.14.4. Przewodnictwo jako funkcja indukcji pola magnetycznego dla dwuwymiarowego układu. Widać, że przewodnictwo wykazuje oscylacje (oscylacje Shubnikova - de Haasa). Przy zwiększeniu indukcji pola magnetycznego, poziom Fermiego przechodzi przez różne poziomy Landaua, co ujawnia się jako oscylacje w przewodnictwie.

Z amplitudy oscylacji można otrzymać wartość efektywnej masy nośników ładunku. Oprócz tego, mierząc częstość oscylacji Shubnikova - de Haasa można otrzymać wartość dwuwymiarowej koncentracji nośników. A więc, pomiary oscylacji Shubnikova - de Haasa dają ważną diagnostyczną metodę charakteryzującą transport nośników w dwuwymiarowej elektronowej systemie.

### Efekt de Haasa - van Alfen

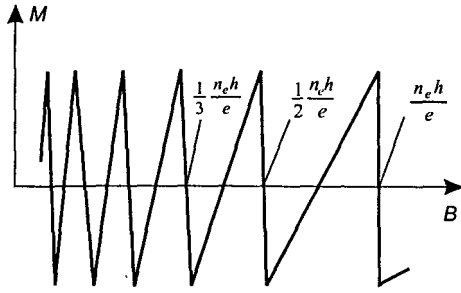
Efektom de Haasa – van Alfen nazywają oscylacje podatności magnetycznej albo namagnesowania w zależności od indukcji zewnętrznego pola magnetycznego  $B$  (rys.14.5). Fizyczny mechanizm tych oscylacji jest dość prosty. Rozważmy gaz elektronowy w polu magnetycznym o indukcji  $B$ . Namagnesowanie (moment magnetyczny jednostkowej objętości próbki) określa wzór

$$M = - \frac{\partial E}{\partial B}, \quad (14.33)$$

gdzie  $E$  - całkowita energia układu w polu magnetycznym o indukcji  $B$ .

W polu magnetycznym przy  $T = 0$  elektrony obsadzają tylko poziomy Landaua. Załóżmy, że liczba elektronów  $n_e$  jest mniejsza niż zwrotność poziomu Landaua  $eB/h$  i

elektrony zajmują niższy poziom Landaua (11.4), dla którego  $n = 0$ . Wtedy całkowita energia gazu elektronowego wynosi



$$E = n_e \frac{\hbar\Omega}{2} \equiv n_e \frac{e\hbar B}{2m}, \quad (14.34)$$

a moment magnetyczny jest równy

$$M = -\frac{\partial E}{\partial B} = -n_e \frac{e\hbar}{2m}. \quad (14.35)$$

Niech indukcja pola magnetycznego została zmniejszona tak, że

$$2(eB/h) > n_e > (eB/h).$$

Rys.14.5. Zależność momentu magnetycznego gazu elektronowego od indukcji pola magnetycznego

W tym przypadku elektrony muszą obsadzać nie tylko poziom Landaua z  $n = 0$ , ale również poziom z  $n = 1$ . Energia całkowita układu wtedy będzie wynosiła

$$E = \frac{\hbar\Omega}{2} \cdot \frac{eB}{h} + \frac{3\hbar\Omega}{2} \cdot \left( n_e - \frac{eB}{h} \right) \equiv n_e \frac{3e\hbar B}{2m} - \frac{e^2 B^2}{2\pi m}. \quad (14.36)$$

Skąd dla momentu magnetycznego znajdujemy

$$M = -n_e \frac{3e\hbar}{2m} + \frac{e^2 B}{\pi m}. \quad (14.37)$$

A zatem przy  $B = n_e h / e$  moment magnetyczny gwałtownie zmienia się od wielkości  $(-e\hbar n_e / 2m)$  do wielkości  $(+e\hbar n_e / 2m)$ . Przy mniejszych wartościach indukcji pola magnetycznego moment magnetyczny zmienia się liniowo, osiągając wartości  $(-e\hbar n_e / 2m)$  dla  $B = n_e h / 2e$ .

Jeżeli indukcja pola magnetycznego okaże się w zakresie  $(n_e h / 3e) < B < (n_e h / 2e)$ , to elektrony zaczną obsadzać poziom Landaua z  $n = 2$  i energia całkowita układu wtedy będzie równa

$$E = \frac{\hbar\Omega}{2} \cdot \frac{eB}{h} + \frac{3\hbar\Omega}{2} \cdot \frac{eB}{h} + \frac{5\hbar\Omega}{2} \cdot \left( n_e - \frac{2eB}{h} \right) \equiv n_e \frac{5e\hbar B}{2m} - \frac{3e^2 B^2}{2\pi m}. \quad (14.38)$$

Skąd dla momentu magnetycznego znajdujemy

$$M = -n_e \frac{5e\hbar}{2m} + \frac{3e^2 B}{\pi m}. \quad (14.39)$$

Zależność  $M(B)$  jest przedstawiona na rys.14.5. Gwałtowne zmiany namagnesowania a więc i podatności magnetycznej  $\chi = M/B$  następują przy  $B = n_e h / ne$ , gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots$