ROZDZIAŁ IV

Właściwości optyczne kryształów

IV.1 Zjawisko podwójnego załamania światła

W odróżnieniu od ośrodków izotropowych, w kryształach prędkość światła v, a więc i współczynnik załamania $n = c/v$ (c – prędkość światła w próżni) zależą od kierunku rozchodzenia się światła w krysztale. Anizotropia optycznych właściwości kryształów powoduje, iż pojedyncza wiązka światła przechodząca przez granicę kryształu załamuje się i rozszczepia się na dwie wiązki. Zjawisko „podwójnego ugięcia" wiązki światła przechodzącej przez kryształ nazywamy **podwójnym załamaniem.** Zjawisko podwójnego załamania światła jest związane z własnością posiadania przez kryształ dwóch współczynników załamania i wynika wprost z równań Maxwella [17,18]:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{IV.1.1a}$$

$$div\vec{D} = \rho, \qquad div\vec{B} = 0. \tag{IV.1.1b}$$

W równaniach (IV.1) $\vec{E}$ - wektor natężenia pola elektrycznego; $\vec{D}$ - wektor indukcji pola elektrycznego (wektor przesunięcia); $\vec{B}$ - wektor indukcji pola magnetycznego; $\vec{H}$ - wektor natężenia pola magnetycznego; ρ - gęstość ładunku elektrycznego; $\vec{j}$ - wektor gęstości prądu elektrycznego.

Zgodnie z prawem Ohma składowe wektora $\vec{j}$ są powiązane ze składowymi wektora $\vec{E}$ zgodnie z równaniem [17,18]

$$j_i = \sigma_{ij} E_j, \tag{IV.1.2}$$

gdzie σ_{ij} są składowe tensora przewodnictwa.

Wektory $\vec{D}$ i $\vec{E}$, oraz wektory $\vec{B}$ i $\vec{H}$ są powiązany między sobą za pomocą równań [17,18]

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j, \tag{IV.1.3}$$

$$B_i = \mu_0 \mu_{ij} H_j. \tag{IV.1.4}$$

Tu ε_0 jest przenikalnością elektryczną próżni (ε_0=8.85 10^{-12} F / m); μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni (μ_0=1.26 10^{-6} H / m); ε_{ij} i μ_{ij} są odpowiednio bezwymiarowymi składowymi tensorów względnych przenikalności elektrycznej i magnetycznej.

Kryształy przezroczyste w zakresie widzialnym są złymi przewodnikami prądu, a ich przenikalności magnetyczne niewiele się różnią od przenikalności próżni. Zakładając więc, że

$$\rho = 0 , \quad \vec{j} = 0 , \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \tag{IV.1.5}$$

możemy zapisać równania Maxwella w postaci

$$rot\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} , \quad rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} , \tag{IV.1.6a}$$

$$div\vec{D} = 0 , \quad div\vec{B} = 0 . \tag{IV.1.6b}$$

Będziemy szukali rozwiązań równań (IV.1.6) w postaci fal płaskich

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)] , \tag{IV.1.7a}$$

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \vec{D}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)] , \tag{IV.1.7b}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)] . \tag{IV.1.7c}$$

Tu $\omega = 2\pi\nu$, ν jest częstotliwością fali świetlnej; $\vec{r}$ - promień wodzący punktu (x_1, x_2, x_3) w krysztale; $\vec{k}$ - wektor falowy, który określa kierunek ruchu czoła fali świetlnej; $\vec{E}_0$, $\vec{D}_0$, $\vec{H}_0$ są amplitudy fal, które zakładamy nie zależą od ω , $\vec{k}$ i $\vec{r}$.

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnej fali płaskiej

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)] , \tag{IV.1.8}$$

są słuszne związki

$$rot\vec{A}(\vec{r},t) = i[\vec{k} \times \vec{A}] , \tag{IV.1.9a}$$

$$div\vec{A}(\vec{r},t) = i(\vec{k} \cdot \vec{A}) , \tag{IV.1.9b}$$

$$\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} = -\omega \cdot \vec{A}(\vec{r},t) . \tag{IV.1.9c}$$

Po uwzględnieniu wzorów (IV.1.9) otrzymujemy z równań (IV.1.6)

$$[\vec{k} \times \vec{H}] = -\omega \vec{D} \ , \quad [\vec{k} \times \vec{E}] = \omega \mu_0 \vec{H} \ , \tag{IV.1.10a}$$

$$(\vec{k} \cdot \vec{D}) = 0 \ , \quad (\vec{k} \cdot \vec{H}) = 0 \ . \tag{IV.1.10b}$$

Z równań (IV.1.10) wynika, że wektory $\vec{k}$, $\vec{H}$ i $\vec{D}$ tworzą trójkę wzajemnie prostopadłych wektorów, a wektor $\vec{E}$ jest prostopadły do wektora $\vec{H}$ i leży w płaszczyźnie wspólnie z wektorami $\vec{D}$ i $\vec{k}$ (rys.IV.1.1).

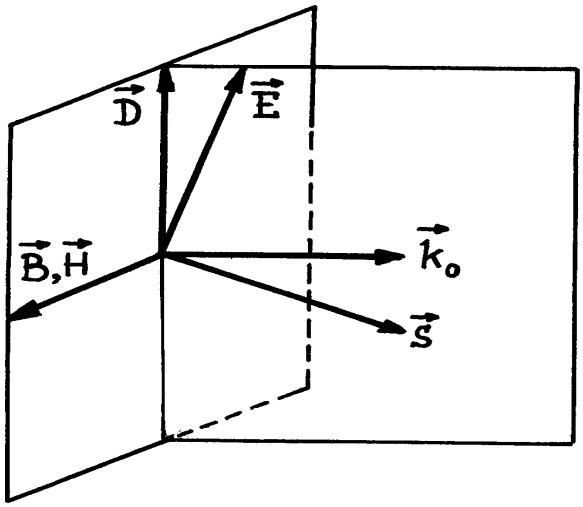
Wprowadzając jednostkowy wektor $\vec{k}_0 = \vec{k} / |\vec{k}|$ i uwzględniając, iż

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{\omega}{c} n \ , \tag{IV.1.11}$$

zapiszmy wektor $\vec{k}$ falowy w postaci

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} n \vec{k}_0 \ . \tag{IV.1.12}$$

Tu $n = c/\upsilon$ jest współczynnikiem załamania światła.



Rys.IV.1.1. Wzajemna orientacja wektorów $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{k}_0$ i $\vec{s}$ w płasko spolaryzowanej fali świetlnej przechodzącej przez kryształ

Korzystając ze wzoru (IV.1.12), z równań (IV.1.10a) otrzymujemy

$$n[\vec{k}_0 \times \vec{E}] = c\mu_0 \vec{H} \ , \tag{IV.1.13}$$

$$n[\vec{k}_0 \times \vec{H}] = -c\vec{D} \ . \qquad \text{(IV.1.14)}$$

Po podstawieniu $\vec{H}$ ze wzoru (IV.1.13) do wzoru (IV.1..14) mamy

$$[\vec{k}_0 \times [\vec{k}_0 \times \vec{E}]] = -\frac{c^2\mu_0}{n^2}\vec{D} \ . \qquad \text{(IV.1.15)}$$

Korzystając ze wzoru rozwijającego podwójny iloczyn wektorowy znajdziemy

$$[\vec{k}_0 \times [\vec{k}_0 \times \vec{E}]] = \vec{k}_0(\vec{k}_0 \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{k}_0 \cdot \vec{k}_0) = -\frac{c^2\mu_0}{n^2}\vec{D} \ . \qquad \text{(IV.1.16)}$$

Wzór (IV.1.16) zapisany przez składowe wektorów przyjmuje postać

$$E_i - k_{0i}k_{0j}E_j = \frac{c^2\mu_0}{n^2}D_i \ . \qquad \text{(IV.1.17)}$$

Skorzystamy teraz z równania materialnego (IV.1.3) i wprowadźmy dziewięć wielkości η_{ik} spełniających równanie

$$\eta_{ik}\varepsilon_{kl} = \delta_{il} \ , \qquad \text{(IV.1.18)}$$

gdzie δ_{il} - symbol Kronekera.

Z (IV.1.18) i równania materialnego (IV.1.3) otrzymujemy

$$\eta_{il}D_l = \varepsilon_0\eta_{il}\varepsilon_{lk}E_k = \varepsilon_0\delta_{ik}E_k = \varepsilon_0 E_i \ , \qquad \text{(IV.1.19a)}$$

czyli

$$E_i = \eta_0\eta_{ij}D_j \ . \qquad \text{(IV.1.19b)}$$

Tu $\eta_0 = 1/\varepsilon_0$. Tensor η_{ij} nosi nazwę **tensora nieprzenikalności elektrycznej**.

Po postawieniu (IV.1.19b) do wzoru (IV.1.17) mamy

$$\eta_{il}D_l - k_{oi}k_{oj}\eta_{jl}D_l = \frac{1}{n^2}D_i \ . \qquad \text{(IV.1.20)}$$

Tu uwzględniliśmy, że $c^2 = 1/(\mu_0\varepsilon_0)$ [17,18].

Dotychczas nic nie mówiliśmy o wyborze osi współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3. Wybierzemy teraz oś Ox_3 wzdłuż kierunku wektora falowego $\vec{k}$. Biorąc pod uwagę, że w tym przypadku $k_{01} = k_{02} = 0; k_{03} = 1$, $D_3 = 0$, ze wzoru (IV.1.20) otrzymujemy następujący układ równań na D_1 i D_2

$$D_1(\eta_{11} - \frac{1}{n^2}) + D_2\eta_{12} = 0 \ , \qquad \text{(IV.1.21a)}$$

$$D_1\eta_{12} + D_2(\eta_{22} - \frac{1}{n^2}) = 0 \ , \qquad \text{(IV.121b)}$$

Układ równań (IV.1.21) ma niezerowe rozwiązanie jeżeli

$$\begin{vmatrix} \eta_{11} - \frac{1}{n^2} & \eta_{12} \\ \eta_{12} & \eta_{22} - \frac{1}{n^2} \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad \text{(IV.1.22)}$$

Z rozwiązania równania (IV.1.22) otrzymujemy

$$n_{1,2}^{-2} = \frac{1}{2}[(\eta_{11} + \eta_{22}) \pm \sqrt{(\eta_{11} - \eta_{22})^2 + (2\eta_{12})^2}] \ . \qquad \text{(IV.1.23)}$$

Ponieważ prędkość fali jest jednoznacznie związana ze współczynnikiem załamania n, obecność dwóch współczynników załamania $n_{1,2}$ wskazuje na to, że w kierunku osi Ox_3 mogą rozprzestrzeniać się dwie fale o różnych prędkościach $\upsilon_{1,2} = c / n_{1,2}$.

Przy zmianie kierunku wektora $\vec{k}_0$, a również zmianie kierunku osi współrzędnych, zachodzą zmiany współczynników załamania n_1 i n_2, ponieważ dla nowego układu współrzędnych wartości liczbowe η_{11}, η_{22} oraz η_{12} będą inne.

Każdy współczynnik załamania będzie miał swój wektor własny $\vec{D}$. Wektory własne $\vec{D}^{(1),(2)}$, odpowiadające współczynnikom n_1 i n_2 znajdziemy podstawiając n_1 i n_2 do układu równań (IV.1.21).

$$D_1^{(1),(2)}(\eta_{11} - \frac{1}{n_{1,2}^2}) + D_2^{(1),(2)}\eta_{12} = 0 \ , \qquad \text{(IV.1.24a)}$$

$$D_1^{(1),(2)}\eta_{12} + D_2^{(1),(2)}(\eta_{22} - \frac{1}{n_{1,2}^2}) = 0 \ . \qquad \text{(IV.1.24b)}$$

Jeżeli wybierzemy osi Ox_1 i Ox_2 w taki sposób żeby $\eta_{12} = 0$ wtedy ze wzoru (IV.1.23) mamy

$$n_1^{-2} = \eta_{11} \ , \qquad \text{(IV.1.25a)}$$

$$n_2^{-2} = \eta_{22} \ , \qquad \text{(IV.1.25b)}$$

Po uwzględnieniu wzorów (IV.1.25) z równań (IV.1.24) znajdujemy, że wektor $\vec{D}^{(1)}$, odpowiadający współczynnikowi załamania $n_1 = 1/\sqrt{\eta_{11}}$, jest równoległy do osi Ox_1. Natomiast wektor $\vec{D}^{(2)}$, odpowiadający współczynnikowi załamania $n_2 = 1/\sqrt{\eta_{22}}$, jest równoległy do osi Ox_2.

Wykazaliśmy więc, że w krysztale w kierunku określonym wektorem $\vec{k}_0$ rozchodzą się z różnymi prędkościami dwie spolaryzowane liniowo fale, przy czym ich płaszczyzny polaryzacji (płaszczyzny stworzone z drgających wektorów $\vec{E}^{(1),(2)}$ oraz wektora falowego $\vec{k}$) są względem siebie prostopadłe.

Charakterystyczną powierzchnię obrazującą zmianę wartości współczynnika załamania w zależności od kierunku rozprzestrzeniania się fali w krysztale nazywamy **indykatrysą optyczną** lub **elipsoidą współczynników załamania**. Równanie indykatrysy optycznej ma postać

$$\eta_{ij} x_i x_j = 1 \ . \tag{IV.1.26}$$

W układzie głównych osi tensora η_{ij} równanie (IV.1.26) przyjmuje postać

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \ , \tag{IV.1.27}$$

gdzie współczynniki

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta_1}}, \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta_2}}, \quad n_3 = \frac{1}{\sqrt{\eta_3}} \tag{IV.1.28}$$

nazywamy **głównymi współczynnikami załamania kryształu**. We wzorze (IV.1.28) η_1, η_2, η_3 są główne składowe tensora „nieprzenikalności" dielektrycznej η_{ij}.

Korzystanie z indykatrysy optycznej pozwala stosunkowo łatwo obliczyć współczynniki załamania i polaryzacji fal rozchodzących się w określonym kierunku. Po przecięciu elipsoidy współczynników płaszczyzną prostopadłą do wektora falowego $\vec{k}$ otrzymujemy elipsę. W układzie współrzędnych dla którego oś Ox_3 jest równoległa do wektora $\vec{k}$, a osi Ox_1 i Ox_2 pokrywają się z głównymi osiami elipsy równanie elipsy ma postać

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} = 1 \ . \tag{IV.1.29}$$

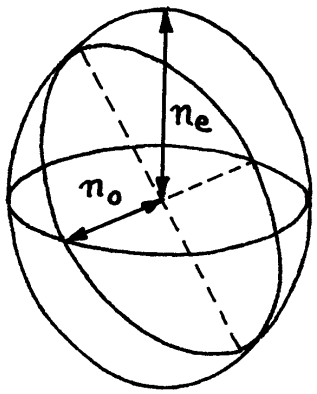
Tu

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta_{11}}}, \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta_{22}}} \tag{IV.1.30}$$

są współczynnikami załamania światła rozchodzącego się w kierunku prostopadłym do płaszczyzny elipsy. Wektor indukcji $\vec{D}^{(1)}$ fali ze współczynnikiem załamania n_1 jest skierowany wzdłuż osi Ox_1, a wektor indukcji $\vec{D}^{(2)}$ fali ze współczynnikiem załamania n_2 będzie skierowany wzdłuż osi Ox_2.

Jeżeli kryształ posiada elementy symetrii, to kształt i orientacja indykatrysy optycznej podlega takim samym ograniczeniom co i charakterystyczna powierzchnia każdej innej właściwości fizycznej określonej przez tensor drugiego rzędu. Dla kryształów należących do układów heksagonalnego, tetragonalnego i trygonalnego indykatrysa optyczna jest elipsoidą obrotową dookoła odpowiedniej osi symetrii (rys.IV.1.2). Jeżeli wybierzemy oś symetrii jako oś Ox_3 to równanie indykatrysy przyjmie postać

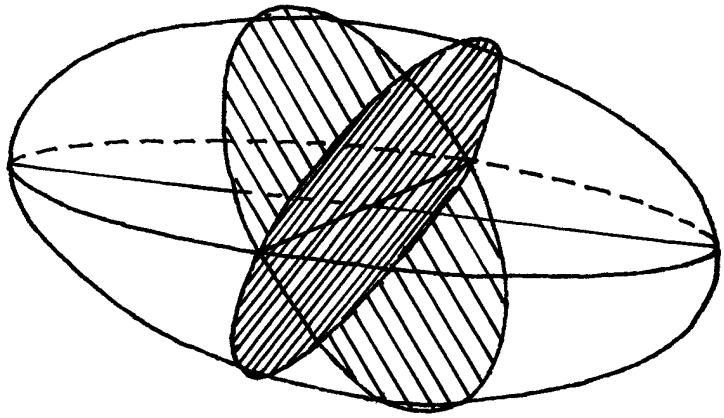
$$\frac{x_1^2}{n_o^2} + \frac{x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} = 1 \ . \tag{IV.1.31}$$



Rys.IV.1.2. Indykatrysa optyczna jednoosiowego kryształu

Dla elipsoidy obrotowej istnieje tylko jeden przekrój w postaci koła. Jest to przekrój środkowy, prostopadły do osi symetrii kryształu. Promień tego przekroju kołowego wynosi n_o . Dlatego fala świetlna rozchodząca się w kierunku osi symetrii kryształu nie będzie ulegała podwójnemu załamaniu. Oś tę nazywamy **osią optyczną kryształu**, a takie kryształy

nazywamy kryształami **jednoosiowymi**. Inne przekroje środkowe indykatrysy optycznej kryształu jednoosiowego są elipsami. Jedna z osi elipsy ma zawsze długość n_o. Długość drugiej osi elipsy zmienia się od n_o do n_e. Zatem w jednoosiowym krysztale jedna z fal świetlnych ma taki sam współczynnik załamania n_o w dowolnym kierunku rozchodzenia się fali. Fale tą nazywamy **zwyczajną falą,** a współczynnik załamania n_o tej fali nazywamy **zwyczajnym współczynnikiem załamania**. Współczynnik załamania drugiej fali, który zmienia się od n_o do n_e nosi nazwę **współczynnika nadzwyczajnego**, a fale tę nazywamy **falą nadzwyczajną**. Jeżeli $n_e - n_o > 0$, kryształ nazywamy **optycznie dodatnim**. Gdy $n_e - n_o < 0$, mówimy, że kryształ jest **optycznie ujemny**.



Rys.IV.1.3. Indykatrysa optyczna dwuosiowego kryształu

Dla kryształów układów trójskośnego, jednoskośnego i rombowego elipsoida współczynników załamania jest elipsoidą trójosiową (rys.IV.1.3). Elipsoida trójosiowa ma dwa przekroje kołowe o promieniach równych średniemu co do wartości współczynnikowi załamania n_m. Stąd fale świetlne rozchodzące się w kierunkach prostopadłych do tych dwóch przekrojów kołowych nie będą ulegały podwójnemu załamaniu. Te dwa kierunki nazywamy **osiami optycznymi kryształu**, a kryształy takie nazywamy **kryształami dwuosiowymi**. W przypadku kryształu dwuosiowego współczynniki załamania dla dwóch fal zależą od kierunku rozchodzenia się fal, a więc obie fale są falami nadzwyczajnymi.

Dla kryształów należących do układu regularnego elipsoida współczynników załamania jest kulą, a więc dowolne przekroje środkowe indykatrysy optycznej są kołami. Zatem w kryształach układu regularnego w dowolnym kierunku rozchodzi się tylko jedna fala, której współczynnik załamania jest stały. Zjawisko dwójłomności światła w kryształach układu regularnego nie obserwuje się, a więc te kryształy są optycznie izotropowe.

Anizotropia dielektrycznych własności kryształów powoduje, że w ogólnym przypadku kierunek rozchodzenia się czoła fali (kierunek wektora falowego $\vec{k}_0$) nie pokrywa się z kierunkiem promienia świetlnego, czyli z kierunkiem rozchodzenia się strumienia energii fali świetlnej [17,18]. Kierunek promienia świetlnego określa wektor Poyntinga-Umowa [17,18]

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}[\vec{E} \times \vec{B}] = [\vec{E} \times \vec{H}] \ . \qquad \text{(IV.1.32)}$$

Tu uwzględniliśmy wzór (IV.1.5). Wektor $\vec{H}$ leży w płaszczyźnie czoła fali. Natomiast wektor $\vec{E}$ nie leży w tej płaszczyźnie (rys.IV.1.1), a więc iloczyn wektorowy $\vec{E}$ i $\vec{H}$ nie pokrywa się z kierunkiem wektora falowego $\vec{k}_0$, a leży w płaszczyźnie wspólnej z wektorami $\vec{D}$, $\vec{E}$ i $\vec{k}_0$ (rys.IV.1.1). Ponieważ w kierunku wektora $\vec{k}_0$ rozchodzą się dwie fale z wektorami indukcji elektrycznej $\vec{D}^{(1)}$ i $\vec{D}^{(2)}$, odpowiadającymi im promieniami świetlnymi będą $\vec{S}^{(1)}$ i $\vec{S}^{(2)}$. Z wektorem falowym $\vec{k}_0$ promieni świetlne $\vec{S}^{(1)}$ i $\vec{S}^{(2)}$ tworzą kąty α i β :

$$\cos\alpha = \frac{\vec{D}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(1)}}{\left|\vec{D}^{(1)}\right|\left|\vec{E}^{(1)}\right|} \ , \qquad \text{(IV.1.33)}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{D}^{(2)} \cdot \vec{E}^{(2)}}{\left|\vec{D}^{(2)}\right|\left|\vec{E}^{(2)}\right|} \ , \qquad \text{(IV.1.34)}$$

Ze wzoru (IV.1.32) wynika, że jednostkowy wektor $\vec{s} = \vec{S}/\left|\vec{S}\right|$ wzdłuż promienia świetlnego jest prostopadły do wektorów $\vec{E}$ i $\vec{H}$, czyli

$$(\vec{s} \cdot \vec{E}) = 0 \ , \quad (\vec{s} \cdot \vec{H}) = 0 \ . \qquad \text{(IV.1.35)}$$

Korzystając ze wzorów (IV.1.13) i (IV.1.14), obliczymy iloczyny wektorowe wektora $\vec{s}$ oraz wektorów $\vec{D}$ i $\vec{H}$:

$$[\vec{s} \times \vec{D}] = -\frac{n}{c}[\vec{s} \times [\vec{k}_0 \times H]]$$
$$= -\frac{n}{c}\{\vec{k}_0 \cdot (\vec{s} \cdot \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\vec{s} \cdot \vec{k}_0)\} = \frac{1}{c \cdot q} \cdot \vec{H} \quad , \tag{IV.1.36a}$$

$$[\vec{s} \times \vec{H}] = \frac{n}{c\mu_0}[\vec{s} \times [\vec{k}_0 \times \vec{E}]]$$
$$= \frac{n}{c\mu_0}\{\vec{k}_0 \cdot (\vec{s} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{s} \cdot \vec{k}_0)\} = -\frac{1}{(c\mu_0) \cdot q} \cdot \vec{E} \quad . \tag{IV.1.36b}$$

Tu

$$q = \frac{1}{n \cdot (\vec{s} \cdot \vec{k}_0)} = \frac{1}{n \cdot \cos\alpha} \quad . \tag{IV.1.37}$$

Ponieważ prędkość rozchodzenia się energii fali świetlnej w kierunku promienia świetlnego wynosi $u = \upsilon / \cos\alpha$, wielkość $q = 1/(n \cdot \cos\alpha) = u/c$ jest odwrotnie proporcjonalna do współczynnika załamania.

Porównajmy teraz równania Maxwella dla wektora falowego $\vec{k}_0$ (równania (IV.1.13) i (IV.1.14), oraz (IV.1.3)) z równaniami (IV.1.36) i (IV.1.19) dla wektora promienia świetlnego $\vec{s}$:

wektor $\vec{k}_0$	Wektor $\vec{s}$
$n[\vec{k}_0 \times \vec{H}] = -c\vec{D}$	$q[\vec{s} \times \vec{H}] = -c\varepsilon_0\vec{E}$
$n[\vec{k}_0 \times \vec{E}] = c\mu_0\vec{H}$	$q[\vec{s} \times \eta_0\vec{D}] = c\mu_0\vec{H}$
$E_i = \eta_0\eta_{ij}D_j$	$D_i = \varepsilon_0\varepsilon_{ij}E_j$

(IV.1.38)

Ze wzorów (IV.1.38) wynika, że układ równań dla wektora falowego $\vec{k}_0$ przechodzi do układu równań dla wektora promienia świetlnego $\vec{s}$, jeżeli w tych równaniach wykonamy zamianę:

$$\vec{E} \Rightarrow \eta_0\vec{D}, \quad \vec{D} \Rightarrow \varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{H} \Rightarrow \vec{H}, \quad \vec{k}_0 \Rightarrow \vec{s}, \quad \eta_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{ij}, \quad n \Rightarrow q \quad . \tag{IV.1.39}$$

Korzystając z podobieństwa układów równań dla wektorów $\vec{k}_0$ i $\vec{s}$ możemy z otrzymanych wyżej wyników dla wektora falowego $\vec{k}_0$ od razu otrzymać wyniki dla wektora promienia

świetlnego $\vec{s}$. Dla promienia świetlnego rolę powierzchni charakterystycznej odgrywa **elipsoida Frenell'a**

$$\varepsilon_{ij} x_i x_j = 1. \qquad \text{(IV.1.40)}$$

Dla optycznie dwuosiowego kryształu elipsoida Frennell'a jest elipsoidą trójosiową i w układzie głównych osi tensora przenikalności dielektrycznej ε_{ij} równanie elipsoidy Frennell'a ma postać

$$n_1^2 x_1^2 + n_2^2 x_2^2 + n_3^2 x_3^2 = 1. \qquad \text{(IV.1.41)}$$

Tu $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1} = 1/\sqrt{\eta_1}$, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2} = 1/\sqrt{\eta_2}$, $n_3 = \sqrt{\varepsilon_3} = 1/\sqrt{\eta_3}$.

Dla optycznie jednoosiowego kryształu równanie elipsoidy Frennell'a ma postać

$$n_0^2 x_1^2 + n_0^2 x_2^2 + n_e^2 x_3^2 = 1. \qquad \text{(IV.1.42)}$$

Dla kryształów układu regularnego elipsoida Frenell'a jest kulą o promieniu $q = 1/n$.

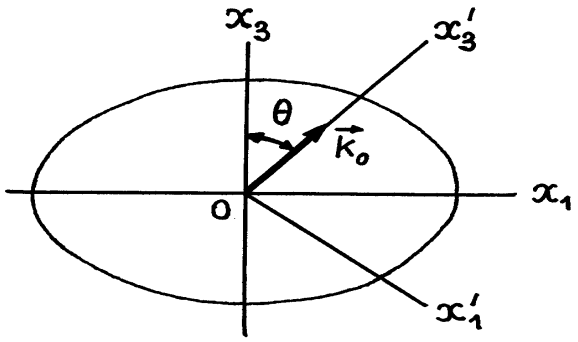
Przykład IV.1.1. Znajdziemy kąt między wektorem falowym $\vec{k}_0$ i promieniem $\vec{s}$ fali świetlnej rozchodzącej się w krysztale $LiNbO_3$ (grupa punktowa – 3m; główne wartości tensora nieprzenikalności dielektrycznej są równe: $\eta_1 = \eta_2 = 0{,}023$; $\eta_3 = 0{,}03$) w kierunku, który tworzy kąt 45^0 z osią 3-krotną.

Kryształ $LiNbO_3$ należy do układu trygonalnego, a więc jest to kryształ optycznie jednoosiowy. W układzie głównych osi tensora η_{ij} wektor falowy $\vec{k}_0$ ma składowe ($\sin\theta$, 0, $\cos\theta$) (rys.IV.1.4). Rozważmy układ współrzędnych Ox_1', $Ox_2' = Ox_2$, Ox_3' w którym oś Ox_3' pokrywa się z kierunkiem wektora $\vec{k}_0$ (rys.IV.1.4).

Macierz $\alpha_{ij'}$, określająca przejście od jednego układu współrzędnych do drugiego ma postać:

$$\left[\alpha_{ij'}\right] = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \end{bmatrix}. \qquad \text{(IV.1.43)}$$

Korzystając z reguł przekształcenia składowych tensora drugiego rzędu, znajdujemy, że w układzie współrzędnych Ox_1', Ox_2', Ox_3' tensor η_{ij}' ma postać



Rys.IV.1.4. Przekrój indykatrysy optycznej płaszczyzną x_1Ox_3

$$\left[\eta'_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \eta_1 \sin^2\theta + \eta_3 \cos^2\theta & 0 & \eta_1 \sin\theta\ \cos\theta - \eta_3 \sin\theta\ \cos\theta \\ 0 & \eta_1 & 0 \\ \eta_1 \sin\theta\ \cos\theta - \eta_3 \sin\theta\ \cos\theta & 0 & \eta_1 \cos^2\theta + \eta_3 \sin^2\theta \end{bmatrix} . \quad \text{(IV.1.44)}$$

Kierunki wektorów $\vec{D}^{(1)}$ i $\vec{D}^{(2)}$ znajdziemy z rozwiązania układu równań (IV.1.24)

$$D_1^{(1),(2)}(\eta'_{11} - \frac{1}{n_{1,2}^2}) + D_2^{(1),(2)}\eta'_{12} = 0 , \quad \text{(IV.1.45a)}$$

$$D_1^{(1),(2)}\eta'_{12} + D_2^{(1),(2)}(\eta'_{22} - \frac{1}{n_{1,2}^2}) = 0 , \quad \text{(IV.1.45b)}$$

gdzie, zgodnie z (IV.1.23) i (IV.1.44):

$$n_1^{-2} = \frac{1}{2}[(\eta'_{11} + \eta'_{22}) + \sqrt{(\eta'_{11} - \eta'_{22})^2 + (2\eta'_{12})^2}] = \eta'_{11} , \quad \text{(IV.1.46a)}$$

$$n_2^{-2} = \frac{1}{2}[(\eta'_{11} + \eta'_{22}) - \sqrt{(\eta'_{11} - \eta'_{22})^2 + (2\eta'_{12})^2}] = \eta'_{22} = \eta_1 . \quad \text{(IV.1.46b)}$$

Po podstawieniu (IV.1.46) do układu równań (IV.1.45) otrzymujemy, że wektory $\vec{D}^{(1)}$ jest skierowany wzdłuż osi Ox_1' ($\vec{D}^{(1)}=(D_1^{(1)},0,0)$). Natomiast wektor $\vec{D}^{(2)}$ jest skierowany wzdłuż osi $Ox_2' = Ox_2$ ($\vec{D}^{(2)} = (0, D_2^{(2)},0)$). Wektory $\vec{E}^{(1)}$ i $\vec{E}^{(2)}$ znajdziemy korzystając ze wzoru

$$E_i = \eta_0 \eta_{ij} D_j .$$

Skąd dla składowych wektora $\vec{E}^{(1)}$ mamy

$$\begin{aligned} E_1^{(1)} &= \eta_0(\eta_1 \sin^2\theta + \eta_3 \cos^2\theta)\cdot D_1^{(1)}, \\ E_2^{(1)} &= 0, \\ E_3^{(1)} &= \eta_0(\eta_1 - \eta_3)\sin\theta\cos\theta \cdot D_1^{(1)}. \end{aligned} \qquad \text{(IV.1.47)}$$

Kąt między wektorami $\vec{k}_0$ i $\vec{s}$ znajdujemy stosując wzór (IV.1.33):

$$\cos\alpha = \frac{\vec{E}^{(1)}\cdot\vec{D}^{(1)}}{\left|\vec{E}^{(1)}\right|\cdot\left|\vec{D}^{(1)}\right|} = \frac{\eta_1 \sin^2\theta + \eta_3 \cos^2\theta}{\sqrt{\eta_1^2 \sin^2\theta + \eta_3^2 \cos^2\theta}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_3)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\eta_1^2 + \eta_3^2}} = 0{,}9925 \quad .$$

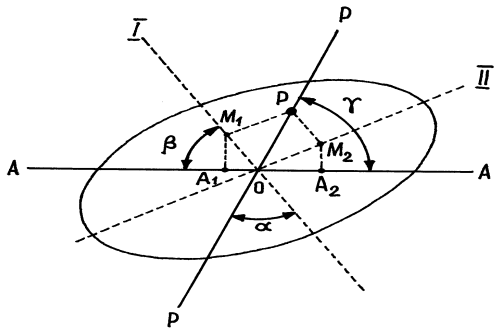
Stąd mamy

$$\alpha = 7^0 .$$

Wektor $\vec{E}^{(2)}$ określa polaryzację fali zwyczajnej i jest równoległy do wektora $\vec{D}^{(2)}$. Składowe wektora $\vec{E}^{(2)}$ są równe $\vec{E}^{(2)} = (0,\eta_0\eta_1 D_2^{(2)},0)$, a więc dla fali zwyczajnej $\vec{k}_0 \parallel \vec{s}$ i $\beta = 0$.

Przykład IV.1.2. Przy przejściu światła przez kryształ optycznie anizotropowy zachodzi nie tylko podwójne załamanie światła, a również polaryzacja powstałych wiązek świetlnych. Zjawisko to stosuje się w urządzeniach służących do wytwarzania (**polaryzatory**) oraz do badania (**analizatory**) światła spolaryzowanego. Najstarszym z tych urządzeń jest pryzmat Nicola, nazywany **nikolem**. Pryzmat Nicola zawiera dwie sklejone części z kryształu kalcytu tak, aby promień zwyczajny został odbity całkowicie od powierzchni sklejenia, a promień nadzwyczajny przechodził przez nią bez zmiany kierunku. Promień nadzwyczajny wychodzący z nikola jest spolaryzowany w kierunku wyznaczonym przez położenie przekroju głównego kryształu, czyli w płaszczyźnie przekroju zawierającego oś optyczną.

Wyprowadźmy wzór na natężenie światła, przechodzącego przez układ: polaryzator – kryształ – analizator (rys.IV.1.5), zakładając, ze płaszczyzny drgań w analizatorze i polaryzatorze tworzą kąt γ (płaszczyzny A i P na rys.IV.1.5), a płaszczyzny drgań (płaszczyzny I i II na rys.IV.1.5) w krysztale tworzą kąty α i β z odpowiednimi płaszczyznami polaryzatora i analizatora.



Rys.IV.1.5. Przekrój indykatrysy optycznej płaszczyzną powierzchni płytki

Jeżeli oznaczmy przez n_1 i n_2 współczynniki załamania światła spolaryzowanego odpowiednio w kierunkach I i II, a przez d oznaczmy grubość płytki krystalicznej, to różnica faz dwóch fał (fali spolaryzowanej wzdłuż kierunku I i fali spolaryzowanej wzdłuż kierunku II) wynosi

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_1 - n_2) \ . \qquad \text{(IV.1.48)}$$

Niech I_0 jest natężenie wiązki światła wychodzącej z polaryzatora. Amplitudę tej wiązki określa punkt P na rys. IV.1.5 ($OP = \sqrt{I_0}$). Z rys.IV.1.5 wynika, że amplitudy fal spolaryzowanych w krysztale wzdłuż kierunków I i II są równe: $OM_1 = \sqrt{I_0} \cdot \cos\alpha$, $OM_2 = \sqrt{I_0} \cdot \sin\alpha$. Natężenie wiązki światła wychodzącej z analizatora określa wzór

$$I = (OA_1)^2 + (OA_2)^2 - 2(OA_1)(OA_2)\cos\varphi \ .$$

Ponieważ $OA_1 = \sqrt{I_0} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta$ i $OA_2 = \sqrt{I_0} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$, to na natężenie światła przechodzącego przez układ: polaryzator – kryształ – analizator otrzymujemy następujący wzór

$$I = I_0 \cdot \cos^2\gamma + I_0 \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \sin^2(\varphi / 2) . \qquad \text{(IV.1.49)}$$

Tu uwzględniliśmy, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

Ze wzoru (IV.1.49) wynika, że jeżeli nikole są skrzyżowane ($\gamma = 90^0$, $\alpha + \beta = 90^0$), to

$$I = I_0 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2(\varphi/2) = \frac{1}{4} I_0 (1 - \cos 4\alpha) \cdot (1 - \cos\varphi) \quad \text{(IV.1.50)}$$

A zatem maksymalne natężenie światła będzie miała płytka dla której różnica faz wynosi $\varphi = \pi$. Przy obrocie kryształu dookoła osi normalnej do płytki krystalicznej będziemy cztery razy obserwowali całkowite wygaszanie światła (przy $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$) i całkowite przepuszczanie światła (przy $\alpha = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$).

Jeżeli nikole są zorientowane w taki sposób, że ($\gamma = 0^0$, $\alpha + \beta = 180^0$), to

$$I = I_0 \cdot [1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2(\varphi/2)]. \quad \text{(IV.1.51)}$$

Ze wzoru (IV.1.51) wynika, że przy obrocie kryształu dookoła osi normalnej do płytki krystalicznej również będziemy cztery razy obserwowali całkowite wygaszanie i przepuszczanie światła, ale w porządku odwrotnym: przepuszczanie światła będziemy obserwowali przy $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, a całkowite wygaszanie światła będziemy obserwowali przy $\alpha = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$.

Przykład IV.I.3. Znajdziemy kąt załamania ψ fali nadzwyczajnej dla światła padającego pod kątem φ na płytkę z optyczne jednoosiowego kryształu (na przykład kryształu kalcytu). Oś optyczna kryształu leży w płaszczyźnie padania światła i tworzy kąt β z wektorem normalnym do powierzchni płytki.

Przy rozwiązaniu zadania będziemy rozważać płaską falę świetlną jako foton o pędzie $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ (tu $\hbar$ - stała Plancka, a $\vec{k}$ - wektor falowy) i skorzystamy z faktu, że składowa wektora falowego $\vec{k}$ równoległa do powierzchni płytki musi być ciągła na tej powierzchni [17,18].

Dla znalezienia kąta załamania ψ prowadźmy z punktu padania fotonu O okręg o promieniu $|\vec{k}_1|$ ($\vec{k}_1$ - wektor falowy padającego na płytkę fotonu) (rys.IV.1.6). Z tego samego punktu O prowadźmy teraz elipsę. Każdy z punktów elipsy określa możliwy wektor falowy $\vec{k}_2$ fotonu w płytce. Dalej postępujemy następująco. Przedłużając prostą AO do przecięcia z okręgom otrzymujemy punkt P. Przecięcie linii prostopadłej do powierzchni płytki i przechodzącej przez punkt P z elipsą określa punkt B (rys.IV.1.6). Łącząc punkty O i B otrzymujemy prostą OB która właśnie określa kierunek rozchodzenia się fali nadzwyczajnej w

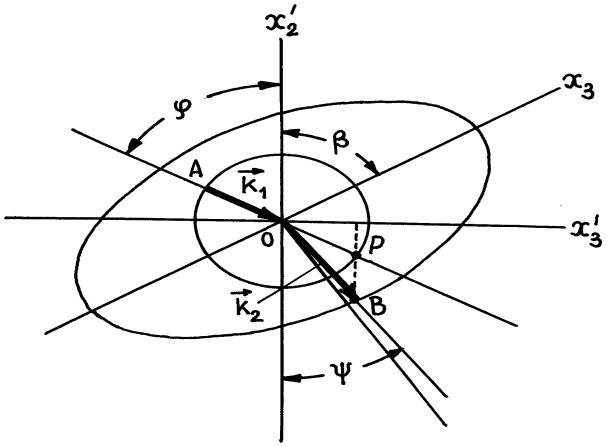
płytce. Istotnie, z rys.IV.1.6 wynika, że wektory $\vec{k}_1 = \overrightarrow{AO}$ i $\vec{k}_2 = \overrightarrow{OB}$ będą miały taką samą składową na powierzchni płytki.

Dla wektora falowego skierowanego wzdłuż osi optycznej $n = n_0$, a dla fali nadzwyczajnej rozchodzącej się w kierunku prostopadłym do osi optycznej $n = n_e$. A zatem, biorąc pod uwagę, iż $\vec{k} = (\omega / c) \cdot n \cdot \vec{k}_0$, równanie elipsy przedstawionej na rys.IV.1.6 w układzie głównych osi elipsy możemy zapisać w postaci

$$\frac{x_2^2}{n_e^2} + \frac{x_3^2}{n_o^2} = \eta_2 x_2^2 + \eta_3 x_3^2 = k_1^2 \ . \qquad \text{(IV.1.52)}$$

Tu wprowadziliśmy oznaczenia: $\eta_2 = 1/n_e^2$, $\eta_3 = 1/n_o^2$; $k_1^2 = (\omega / c)^2$.

Zapiszmy teraz równanie elipsy (IV.1.52) w układzie współrzędnych $x_2^{/}Ox_3^{/}$, dla którego oś $Ox_2^{/}$ pokrywa się z kierunkiem wektora normalnego do powierzchni płytki.



Rys.IV.1.6. Przekrój indykatrysy optycznej płaszczyzną polaryzacji światła (x_2Ox_3)

W układzie $x_2^{/}Ox_3^{/}$ równanie (IV.1.52) przyjmuje postać

$$\eta_{2/2/} x_{2/}^2 + 2\eta_{2/3/} x_{2/} x_{3/} + \eta_{3/3/} x_{3/}^2 = k_1^2 \ , \qquad \text{(IV.1.53)}$$

gdzie składowe tensora nieprzenikalności $\eta_{i/j/}$ są związane ze składowymi tensora η_{ij} równaniami

$$\eta_{2/2/} = \alpha_{2/2}^2 \eta_2 + \alpha_{2/3}^2 \eta_3 = \cos^2\gamma \cdot \eta_2 + \sin^2\gamma \cdot \eta_3 \ , \qquad \text{(IV.1.54a)}$$

$$\eta_{3/3/} = \alpha_{3/2}^2 \eta_2 + \alpha_{3/3}^2 \eta_3 = \sin^2\gamma \cdot \eta_2 + \cos^2\gamma \cdot \eta_3 \ , \qquad \text{(IV.1.54b)}$$

$$\eta_{2'3'} = \alpha_{2'2}\alpha_{3'2}\eta_2 + \alpha_{2'3}\alpha_{3'3}\eta_3 = \cos\gamma\,\sin\gamma\cdot(\eta_2 - \eta_3)\ . \qquad \text{(IV.1.54c)}$$

Tu $\gamma = 90^0 - \beta$.

Rozważmy teraz koniec wektora falowego $\vec{k}_2$ (punkt B) na elipsie, określoną wzorem (IV. 1.53). Uwzględniając, że $\mathrm{ctg}\psi = x_2'/x_3'$ oraz $x_3' \equiv (k_2)_{3'} = k_1\cdot\sin\varphi$ i podstawiając wzory (IV. 1.54) do wzoru (IV.1.543), otrzymujemy

$$\begin{aligned}(\sin^2\beta\cdot\eta_2 + \cos^2\beta\cdot\eta_3)\cdot\mathrm{ctg}^2\psi + (\eta_2 - \eta_3)\cdot\sin 2\beta\cdot\mathrm{ctg}\psi \\ + (\cos^2\beta\cdot\eta_2 + \sin^2\beta\cdot\eta_3) - \frac{1}{\sin^2\varphi} = 0\end{aligned}\ . \qquad \text{(IV.1.55)}$$

Skąd mamy

$$\mathrm{ctg}\psi = \frac{(\eta_3 - \eta_2)\cdot\sin 2\beta \pm 2\sqrt{(\eta_2\cdot\sin^2\beta + \eta_3\cdot\cos^2\beta)/\sin^2\varphi - \eta_2\eta_3}}{2(\sin^2\beta\cdot\eta_2 + \cos^2\beta\cdot\eta_3)}\ . \qquad \text{(IV.1.56)}$$

Ze wzorów (IV.1.55) i (IV.1.57) wynika, że w przypadku fali zwyczajnej, dla której $\eta_2 = \eta_3 \equiv 1/n_o^2$, mamy

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = n_o\ . \qquad \text{(VI.1.57)}$$

Wzór (VI.1.57) jest dobrze znanym z optyki ośrodków izotropowych jako **prawo W. Snelliusa**.

Zadania do § IV.1.1

1. Znaleźć kąt α między wektorem falowym $\vec{k}_0$ i promieniem $\vec{s}$ fali świetlnej rozchodzącej się w krysztale turmaliny ($(Na,Ca)(Mg,Li,Al)_3Al_6[BO_3][Si_6O_{18}]$ grupa punktowa – 3m; główne wartości tensora przenikalności dielektrycznej są równe: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 8{,}2; \varepsilon_3 = 7{,}5$) w kierunku, który tworzy kąt 30^0 z osią 3-krotną.

Odpowiedź: $\alpha = 1{,}03^0$.

2. Oś optyczna płytki o grubości $0.01cm$, wyciętej z kryształu kwarcu znajduje się w płaszczyźnie płytki. Biorąc pod uwagę, że dla kwarcu $n_e = 1.553$, $n_o = 1.544$ (dla fali świetlnej o długości $\lambda = 0.589\mu m$) obliczyć różnicę faz między falą zwyczajną i nadzwyczajną.

Odpowiedź: $\Delta\varphi = 0.24 rad$.

3. Wykazać, że jeżeli oś optyczna płytki krystalicznej jest prostopadła do powierzchni płytki, to wektory falowe fal załamanych oraz oś optyczna znajdują się w jednej płaszczyźnie.

4. Obliczyć natężenie światła, przechodzącego przez układ: polaryzator – kryształ – analizator (rys.IV.1.5), zakładając, ze płaszczyzny drgań w analizatorze i polaryzatorze są skrzyżowane, a oś optyczna płytki o grubości $0.5cm$ z kryształu KDP ($n_e = 1.469$, $n_o = 1.511$ dla fali świetlnej o długości $\lambda = 0.546\mu m$) leży w płaszczyźnie płytki i tworzy kąt 45^0 z kierunkiem drgań światła w polaryzatorze.

Odpowiedź: $I / I_0 = 0.616$.

IV.2 Zjawisko elastooptyczne

Zmiana optycznych właściwości kryształu pod wpływem działania na kryształ naprężeń nosi nazwę **zjawiska elastooptycznego albo piezooptycznego**. Optyczne właściwości kryształu określa elipsoida współczynników załamania światła czyli tensor nieprzenikalności dielektrycznej η_{ij}. Pod wpływem zewnętrznych naprężeń zachodzi zmiana składowych tensora η_{ij}. W przypadku małych zmian kształtu, wymiarów oraz orientacji elipsoidy współczynników załamania światła te zmiany możemy opisać równaniem

$$\Delta\eta_{ij} = \eta_{ij}^{0} - \eta_{ij} \quad . \tag{IV.2.1}$$

Tu η_{ij}^{0} jest tensor nieprzenikalności dielektrycznej nie deformowanego kryształu, a η_{ij} - tensor nieprzenikalności dielektrycznej kryształu deformowanego.

Wielkości $\Delta\eta_{ij}$ są w ogóle niewiadomymi funkcjami składowych tensora naprężeń t_{kl}. Jednak w przypadku niewielkich zmian tensora η_{ij}, zależności $\Delta\eta_{ij}$ od t_{kl} z dobrym przybliżeniem (przybliżenie liniowe) możemy opisać wzorem

$$\Delta\eta_{ij} = \pi_{ijkl} \cdot t_{kl} \quad . \tag{IV.2.2}$$

Współczynniki π_{ijkl}, które tworzą składowe tensora czwartego rzędu, nazywamy **współczynnikami piezooptycznymi**.

Ponieważ składowe tensora naprężenia t_{kl} są związane ze składowymi tensora deformacji r_{ij} prawem Hooke'a ($t_{ij} = c_{ijkl} \cdot r_{kl}$), zmiany tensora dielektrycznej nieprzenikalności możemy wyrazić również przez składowe tensora deformacji r_{ij}

$$\Delta \eta_{ij} = p_{ijkl} \cdot r_{kl} \ . \tag{IV.2.3}$$

Tu wielkości $p_{ijkl} = \pi_{ijmn} \cdot c_{mnkl}$ są składowymi tensora czwartego rzędu i noszą nazwę **współczynników elastooptycznych.**

Korzystając z reguł macierzowego zapisu składowych tensora (patrz rozdział III) wzory (IV.2.2) i (IV.2.3) możemy zapisać w postaci

$$\Delta \eta_m = \pi_{mn} \cdot t_n \ , \tag{IV.2.4}$$

$$\Delta \eta_m = p_{mn} \cdot r_n \ . \tag{IV.2.5}$$

Tensory π_{ijkl} i p_{ijkl} są tensorami materii, a zatem podlegają ograniczeniom narzucanym zasadą Neumanna.

W praktyce najczęstszej wykorzystuje się efekt elastooptyczny podłużny i efekt elastooptyczny poprzeczny. W przypadku efektu elastooptycznego podłużnego kierunek działania naprężenia ściskającego płytkę krystaliczną pokrywa się z kierunkiem promienia fali świetlnej. Dla efektu elastooptycznego poprzecznego te kierunki są wzajemnie prostopadłe.

Przykład IV.2.1. Dla kryształów należących do układu regularnego elipsoida współczynników załamania jest kulą, a zatem zjawisko dwójłomności światła w kryształach układu regularnego nie obserwuje się. Rozważmy poprzeczny efekt elastooptyczny w kryształach klasy $m3m$ w przypadku, gdy kryształ został ściśnięty wzdłuż osi symetrii 4-krotnej.

Wybierzmy osi współrzędnych Ox_1, Ox_2, Ox_3 wzdłuż trzech wzajemnie prostopadłych 4-krotnych osi symetrii i niech kryształ został ściśnięty wzdłuż osi Ox_3. Wtedy tensor naprężenia ma jedną niezerową składową $t_3 \equiv t$. Zgodnie ze wzorem (IV.2.4) to naprężenie wywołuje następujące zmiany składowych tensora nieprzenikalności dielektrycznej

$$\Delta \eta_m = \pi_{m3} \cdot t_3 \ . \tag{IV.2.6}$$

W kryształach klasy $m3m$ tensor współczynników elastooptycznych π_{mn} ma postać (patrz zadanie 1)

$$[\pi_{mn}] = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{bmatrix} . \qquad \text{(IV.2.7)}$$

A zatem ze wzoru (IV.2.6) mamy

$$\Delta\eta_1 = \Delta\eta_2 = \pi_{12} \cdot t, \quad \Delta\eta_3 = \pi_{11} \cdot t, \quad \Delta\eta_4 = \Delta\eta_5 = \Delta\eta_6 = 0 . \qquad \text{(IV.2.8)}$$

Biorąc pod uwagę (IV.2.8), otrzymujemy równanie dla indykatrysy optycznej

$$\begin{aligned} &(\eta_0 + \Delta\eta_1)x_1^2 + (\eta_0 + \Delta\eta_2)x_2^2 + (\eta_0 + \Delta\eta_3)x_3^2 \\ &= (\eta_0 + \pi_{12} \cdot t) \cdot (x_1^2 + x_2^2) + (\eta_0 + \pi_{11} \cdot t)x_3^2 = 1 \end{aligned} , \qquad \text{(IV.2.9)}$$

gdzie $\eta_0 = 1/n_o^2$ i n_o - współczynnik załamania światła do deformacji kryształu.

Ze wzoru (IV.2.9) wynika, że indykatrysa kryształu regularnego po ściśnięciu kryształu wzdłuż osi symetrii 4-krotnej przyjmuje kształt elipsoidy obrotowej. Główne współczynniki załamania światła są równe

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 &= \frac{1}{\sqrt{\eta_0 + \Delta\eta_1}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}\left(1 + \frac{\Delta\eta_1}{\eta_0}\right)^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\eta_1}{\eta_0}\right) = n_o - \frac{1}{2}n_o^3\pi_{12}t \end{aligned} ,$$

$$\begin{aligned} n_3 &= \frac{1}{\sqrt{\eta_0 + \Delta\eta_3}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}\left(1 + \frac{\Delta\eta_3}{\eta_0}\right)^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\eta_3}{\eta_0}\right) = n_o - \frac{1}{2}n_o^3\pi_{11}t \end{aligned} .$$

Wielkość dwójłomności światła rozchodzącego się wzdłuż kierunku prostopadłego do osi Ox_3 określa wzór

$$\Delta n = n_3 - n_1 = -\frac{1}{2}n_o^3(\pi_{11} - \pi_{12}) \cdot t .$$

Przykład IV.2.2. Rozważmy efekt elastooptyczny w kryształach klasy $m3m$ w przypadku, gdy kryształ został ściśnięty wzdłuż osi symetrii 3 - krotnej.

W danym układzie krystalicznym tensor naprężenia jednoosiowego działającego wzdłuż osi 3 – krotnej, która pokrywa się z kierunkiem $[111]$, ma postać

$$[t_n] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} t & t & t \\ t & t & t \\ t & t & t \end{bmatrix} . \qquad \text{(IV.2.10)}$$

Zgodnie z (IV.2.4) i (IV.2.7) zmiany składowych tensora nieprzenikalności dielektrycznej wynoszą

$$\Delta\eta_1 = \Delta\eta_2 = \Delta\eta_3 = \frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12})\cdot t, , \quad \Delta\eta_4 = \Delta\eta_5 = \Delta\eta_6 = \frac{1}{3}\pi_{44}\cdot t . \qquad \text{(IV.2.11)}$$

Biorąc pod uwagę (IV.2.11), otrzymujemy równanie dla indykatrysy optycznej

$$a\cdot(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2b\cdot(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 1 , \qquad \text{(IV.2.12)}$$

gdzie

$$a = \eta_0 + \frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12})\cdot t , \; 2b = \frac{1}{3}\pi_{44}\cdot t .$$

Ze wzoru (IV.2.12) wynika, że dla odkształconego kryształu układ krystałofizyczny nie jest układem osi głównych indykatrysy optycznej. Znajdziemy główny układ osi indykatrysy optycznej.

Z równania

$$\begin{vmatrix} a-\eta & b & b \\ b & a-\eta & b \\ b & b & a-\eta \end{vmatrix} = (a-b-\eta)\cdot[(a-\eta)^2 + b\cdot(a-\eta) - 2b^2] = 0 ,$$

otrzymujemy

$$\eta_1 = \eta_2 = a - b , \quad \eta_3 = a + 2b . \qquad \text{(IV.2.13)}$$

Ze wzoru (IV.2.13) wynika, że optyczna indykatrysa kryształu odkształconego jest elipsoidą obrotową ($\eta_1 = \eta_2 \neq \eta_3$). A więc deformacja kryształu regularnego wzdłuż osi 3 – krotnej powoduje, że kryształ będzie optycznie jednoosiowy. Kierunek głównej osi indykatrysy optycznej odpowiadającej η_3 znajdziemy z rozwiązania układu równań

$$(a-\eta_3)\cdot c_1 + b\cdot(c_2 + c_3) = -3b\cdot c_1 + b\cdot(c_1 + c_2 + c_3) = 0 ,$$

$$(a-\eta_3)\cdot c_2 + b\cdot(c_1 + c_3) = -3b\cdot c_2 + b\cdot(c_1 + c_2 + c_3) = 0 ,$$

$$(a - \eta_3)\cdot c_3 + b\cdot(c_2 + c_3) = -3b\cdot c_3 + b\cdot(c_1 + c_2 + c_3) = 0 \ ,$$

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \ .$$

Rozwiązanie tych równań ma postać

$$c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

A zatem kierunek osi optycznej deformowanego kryształu, pokrywa się z kierunkiem [111], czyli z kierunkiem działania naprężenia jednoosiowego.

Równanie indykatrysy optycznej deformowanego kryształu w układzie głównych osi tensora nieprzenikalności ma postać

$$\begin{aligned}&[\eta_0 + \frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12} - \frac{1}{2}\pi_{44})\cdot t]\cdot(x_{1'}^2 + x_{2'}^2) \\ &+ [\eta_0 + \frac{1}{3}(\pi_{11} + 2\pi_{12} + \pi_{44})\cdot t]x_{3'}^2 = 1\end{aligned} \ . \qquad \text{(IV.2.14)}$$

Ze wzoru (IV.2.14) wynika, że główne współczynniki załamania światła są równe

$$\begin{aligned}n_1 = n_2 &= \frac{1}{\sqrt{\eta_0 + \Delta\eta_1}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}(1 + \frac{\Delta\eta_1}{\eta_0})^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\eta_1}{\eta_0}) = n_o - \frac{1}{6}n_o^3(\pi_{11} + 2\pi_{12} - \frac{1}{2}\pi_{44})\cdot t\end{aligned} \ ,$$

$$\begin{aligned}n_3 &= \frac{1}{\sqrt{\eta_0 + \Delta\eta_3}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}(1 + \frac{\Delta\eta_3}{\eta_0})^{-1/2} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_0}}(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\eta_3}{\eta_0}) = n_o - \frac{1}{6}n_o^3(\pi_{11} + 2\pi_{12} + \pi_{44})\cdot t\end{aligned} \ .$$

Wielkość dwójłomności światła rozchodzącego się wzdłuż kierunku prostopadłego do osi Ox_3 określa wzór

$$\Delta n = n_3 - n_1 = -\frac{1}{4}n_o^3\pi_{44}\cdot t \ .$$

Zadania do §IV.2

1. Wykazać, że macierz współczynników elastooptycznych kryształów klasy $\bar{4}3m$ ma postać

$$[\pi_{mn}] = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{12} & \pi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} \end{bmatrix}.$$

2. Wykazać, że przy ściśnięciu kryształu klasy $\bar{4}3m$ wzdłuż kierunku $[110]$ indykatrysa optyczna deformuje się w trójosiową elipsoidę, jedna z osi której pokrywa się z kierunkiem działania jednoosiowego naprężenia.

3. Wykazać, że macierz współczynników elastooptycznych kryształów klasy $\bar{4}2m$ ma postać

$$[\pi_{mn}] = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{12} & \pi_{11} & \pi_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{31} & \pi_{31} & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{66} \end{bmatrix}.$$

4. Znaleźć główne współczynniki załamania światła kryształu klasy $\bar{4}2m$ przy działaniu na kryształ wzdłuż kierunku $[100]$ rozciągającego naprężenia.

Odpowiedź: $n_1 = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 \pi_{11} t$, $n_2 = n_o - \frac{1}{2} n_o^3 \pi_{12} t$, $n_3 = n_e - \frac{1}{2} n_e^3 \pi_{13} t$.

5. W płytce o grubości d, wyciętej z kryształu klasy $m3m$ prostopadle do kierunku $[111]$, obserwuje się poprzeczny efekt elektrooptyczny. Różnica dróg optycznych promieni nadzwyczajnego i zwyczajnego wynosi $\lambda / 2$. Wykazać, że z tego eksperymentu możemy otrzymać współczynnik elektrooptyczny π_{44} i

$$\pi_{44} = \frac{2\lambda}{n_o^3 \cdot d \cdot t}.$$

Wskazówka: Patrz wzory z przykładu IV.2.2. Różnica dróg optycznych określa wzór: $\Delta\lambda = \Delta n \cdot d$.

IV.3 Zjawiska elektrooptyczne

Zmiana optycznych właściwości kryształu pod wpływem działania na kryształ pola elektrycznego nosi nazwę **zjawiska elektrooptycznego**. Tutaj podobnie do efektu elastooptycznego wpływ pola elektrycznego na optyczne właściwości kryształu możemy

rozważać jako zmiany elipsoidy współczynników załamania światła czyli tensora nieprzenikalności dielektrycznej η_{ij}. W przypadku małych zmian kształtu, wymiarów oraz orientacji elipsoidy współczynników załamania światła te zmiany możemy opisać równaniem

$$\Delta \eta_{ij} = \eta_{ij}^{0} - \eta_{ij} \ . \qquad \text{(IV.3.1)}$$

Tu η_{ij}^{0} jest tensorem nieprzenikalności dielektrycznej nie deformowanego kryształu, a η_{ij} jest tensorem nieprzenikalności dielektrycznej deformowanego kryształu.

W przypadku niewielkich zmian tensora η_{ij}, zależności $\Delta \eta_{ij}$ od składowych wektora natężenia pola elektrycznego E_k z dobrym przybliżeniem (przybliżenie liniowe) możemy opisać wzorem

$$\Delta \eta_{ij} = r_{ijk} \cdot E_k \ . \qquad \text{(IV.3.2)}$$

Współczynniki r_{ijk}, które tworzą składowe tensora trzeciego rzędu, nazywamy **współczynnikami elektrooptycznymi**. Liniowy efekt elektrooptyczny, określony wzorem (IV.3.2) czasami jest nazywany **efektem Pockelsa**.

W postaci macierzowej efekt Pockelsa opisuje wzór

$$\Delta \eta_{m} = r_{mk} \cdot E_k \ , \qquad \text{(IV.3.3)}$$

Tensor r_{ijk} jest tensorem materii, a zatem podlega ograniczeniom narzucanym zasadą Neumanna. Ponieważ tensor współczynników elektrooptycznych jest tensorem trzeciego rzędu, liniowy efekt elektrooptyczny nie istnieje w kryształach zawierających środek symetrii.

Rozróżnia się efekt elektrooptyczny **pierwotny** i **wtórny**. Jeżeli kryształ nie może odkształcać się, to efekt elektrooptyczny, który obserwujemy w takim zwartym krysztale nazywamy pierwotnym efektem elektrooptycznym. W przypadku kryształu swobodnego pole elektryczne, wskutek odwrotnego efektu piezoelektrycznego, wywołuje odkształcenia kryształu. Takie odkształcenia pociągają za sobą zmiany współczynników załamania za pośrednictwem efektu elastooptycznego. Efekt elektrooptyczny który obserwujemy w tym przypadku nazywamy wtórnym. W swobodnym, nie zwartym krysztale efekt elektrooptyczny jest zatem sumą efektów pierwotnego i wtórnego, a zmiany tensora η_{ij} opisuje wzór

$$\Delta \eta_{ij} = r_{ijk} \cdot E_k + p_{ijkl} \cdot r_{kl} = (r_{ijk} + p_{ijm} \cdot d_{kml}) \cdot E_k \ . \qquad \text{(IV.3.4)}$$

Tu wielkości d_{kml} są współczynnikami piezoelektrycznymi.

Liniowy efekt elektrooptyczny obserwuje się w przypadku gdy naprężenia pola elektrycznego oraz odkształcenia kryształów są małe. Dla dużych naprężeń i odkształceń musimy wprowadzić do wzoru (IV.3.2) wyrazy kwadratowe

$$\Delta \eta_{ij} = r_{ijk} \cdot E_k + R_{ijkl} \cdot E_k \cdot E_l \ . \qquad \text{(IV.3.5)}$$

Współczynniki R_{ijkl}, które tworzą składowe tensora czwartego rzędu, nazywamy **współczynnikami Kerra**. Kwadratowy efekt elektrooptyczny, określony drugim wyrazem we wzorze (IV.3.5) nazywamy **efektem Kerra**.

Efekt Kerra również może być **pierwotnym** i **wtórnym**. Jeżeli kryształ nie może odkształcać się, to efekt Kerra, który obserwujemy w takim zwartym krysztale nazywamy pierwotnym efektem Kerra. W przypadku kryształu swobodnego pole elektryczne wywołuje odkształcenia kryształu

$$r_{jk} = d_{ijk} \cdot E_i + \gamma_{imjk} \cdot E_i \cdot E_m \ . \qquad \text{(IV.3.6)}$$

Pierwszy wyraz w (IV.3.6) odpowiada liniowemu efektowi piezoelektrycznemu. Natomiast drugi kwadratowy wyraz reprezentuje zjawisko, które nosi nazwę **elektrostrykcji**. Odkształcenia elektrostrykcyjne pociągają za sobą zmiany współczynników załamania za pośrednictwem efektu elastooptycznego. Efekt Kerra, który obserwujemy w tym przypadku nazywamy wtórnym. W swobodnym, nie zwartym krysztale efekt elektrooptyczny jest zatem sumą efektów pierwotnego i wtórnego, a zmiany tensora η_{ij} opisuje wzór

$$\Delta \eta_{ij} = R_{ijkl} \cdot E_k \cdot E_l + p_{ijmn} \cdot r_{mn} = (R_{ijkl} + p_{ijmn} \cdot \gamma_{mnkl}) \cdot E_k \cdot E_l \ . \qquad \text{(IV.3.7)}$$

Tu wielkości γ_{mnkl} są **współczynnikami elektrostrykcyjnymi**.

W kryształach posiadających środek inwersji liniowego efektu elektrooptycznego nie obserwuje się, a zatem głównym efektem jest efekt Kerra.

W praktyce najczęściej wykorzystuje się efekt elektrooptyczny podłużny i efekt elektrooptyczny poprzeczny. W przypadku efektu elektrooptycznego podłużnego kierunek działania pola elektrycznego na płytkę krystaliczną pokrywa się z kierunkiem promienia fali świetlnej. Dla efektu elektrooptycznego poprzecznego te kierunki są wzajemnie prostopadłe.

Przykład IV.3.1. Efekt elektrooptyczny często stosuje się w urządzeniach sterujących światłem. Schemat jednego z takich urządzeń jest przedstawiony na rys.IV.3.1. Płytka K z kryształu KDP (KH_2PO_4, grupa punktowa - $\bar{4}2m$) zaopatrzona w okładki metalowe jest umieszczona między skrzyżowanymi polaryzatorami P_1 i P_2. Oś optyczna kryształu jest prostopadła do powierzchni płytki. Jeżeli różnica potencjałów między okładkami metalowymi jest równa zeru, światło od źródła S nie przechodzi przez urządzenie. Natomiast przyłożone pole elektryczne powoduje deformację indykatrysy optycznej i płytka staje się przezroczystą. Zgodnie z (IV.1.50) maksymalne natężenie światła będzie miała płytka dla której różnica faz wynosi $\varphi = \pi$. Ze wzoru (IV.1.48) wynika, że taką różnicę faz będzie miała płytka dla której różnica dróg optycznych wynosi $d \cdot (n_1 - n_2) = \lambda/2$. Współczynniki załamania n_1 i n_2 promieni nadzwyczajnego i zwyczajnego zależą od natężenia pola elektrycznego. Różnica potencjałów dla której płytka staje się przezroczystą oznaczmy jako $U_{\lambda/2}$. Znajdziemy teraz wzór na $U_{\lambda/2}$.

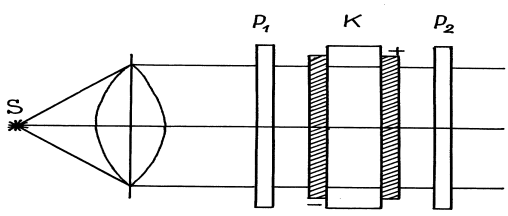
W kryształach klasy $\bar{4}2m$ tensor współczynników elastooptycznych π_{mn} ma trzy niezerowe składowe (patrz zadanie 1): r_{41}, $r_{52} = r_{41}$, r_{63}. A zatem ze wzoru (IV.3.3) mamy

$$\Delta\eta_1 = \Delta\eta_2 = \Delta\eta_3 = \Delta\eta_4 = \Delta\eta_5 = 0, \quad \Delta\eta_6 = r_{63} \cdot E, \quad . \qquad \text{(IV.3.8)}$$

Biorąc pod uwagę (IV.3.8), otrzymujemy równanie dla indykatrysy optycznej

$$\begin{aligned}(\eta_o + \Delta\eta_1)x_1^2 + (\eta_o + \Delta\eta_2)x_2^2 + (\eta_e + \Delta\eta_3)x_3^2 \\ = \eta_o \cdot (x_1^2 + x_2^2) + \eta_e \cdot x_3^2 + 2r_{63}E \cdot x_1x_2 = 1\end{aligned}, \qquad \text{(IV.3.9)}$$

gdzie $\eta_o = 1/n_o^2$, $\eta_e = 1/n_e^2$; n_o, n_e - współczynniki załamania fali zwyczajnej i nadzwyczajnej.



Rys. IV.3.1. Schemat modulatora optycznego

Ze wzoru (IV.3.9) wynika, że przekrój indykatrysy optycznej kryształu płaszczyzną prostopadłą do osi optycznej $\bar{4}$ jest elipsą

$$\eta_o \cdot (x_1^2 + x_2^2) + 2r_{63}E \cdot x_1 x_2 = 1 \ , \qquad \text{(IV.3.10)}$$

Przyjęty układ krystałofizyczny, jak widać ze wzoru (IV.3.10), nie jest układem osi głównych indykatrysy optycznej. Znajdziemy teraz układ osi głównych indykatrysy optycznej.

Z równania

$$\begin{vmatrix} \eta_o - \lambda & a \\ a & \eta_o - \lambda \end{vmatrix} = (\eta_o - \lambda)^2 - a^2 = 0 \ ,$$

otrzymujemy

$$\lambda_1 = \eta_o - a \ , \quad \lambda_2 = \eta_o + a \ . \qquad \text{(IV.3.11)}$$

Tu $a = r_{63}E$.

Kierunki głównych osi Ox_1' i Ox_2' indykatrysy optycznej odpowiadających λ_1 i λ_2 znajdziemy z rozwiązania układu równań

$$(\eta_o - \lambda_i) \cdot c_{1i} + a \cdot c_{2i} = \pm a \cdot c_{1i} + a \cdot c_{2i} = 0 \ ,$$

$$(\eta_o - \lambda_i) \cdot c_{2i} + a \cdot c_{1i} = \pm a \cdot c_{2i} + a \cdot c_{1i} = 0 \ ,$$

$$c_{1i}^2 + c_{2i}^2 = 1 \ .$$

Rozwiązanie tych równań ma postać

$$\lambda_1 = \eta_o + r_{63}E \ , \quad c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ,$$

$$\lambda_2 = \eta_o - r_{63}E \ , \quad c_1 = -c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ ,$$

A zatem kierunki osi głównych osi Ox_1' i Ox_2' indykatrysy optycznej tworzą kąty 45^0 z osiami Ox_1 i Ox_2.

Równanie indykatrysy optycznej deformowanego kryształu w układzie osi głównych tensora nieprzenikalności ma postać

$$(\eta_o + r_{63}E) \cdot x_{1'}^2 + (\eta_o - r_{63}E) \cdot x_{2'}^2 + \eta_e \cdot x_3^2 = 1 \ . \qquad \text{(IV.3.12)}$$

Ze wzoru (IV.3.12) wynika, że główne współczynniki załamania światła są równe

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta_o + \Delta\eta_1}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_o}}(1 + \frac{\Delta\eta_1}{\eta_o})^{-1/2}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_o}}(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\eta_1}{\eta_o}) = n_o - \frac{1}{2}n_o^3 \cdot r_{63} \cdot E \quad ,$$

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta_o + \Delta\eta_2}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_o}}(1 + \frac{\Delta\eta_2}{\eta_o})^{-1/2}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_o}}(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\eta_2}{\eta_o}) = n_o + \frac{1}{2}n_o^3 \cdot r_{63} \cdot E \quad ,$$

$$n_3 = n_e \ .$$

Wielkość dwójłomności światła rozchodzącego się wzdłuż osi Ox_3 określa wzór

$$\Delta n = n_2 - n_1 = n_o^3 \cdot r_{63} \cdot E \ ,$$

a różnica dróg optycznych wynosi

$$d \cdot (n_1 - n_2) = n_o^3 \cdot r_{63} \cdot (E \cdot d) = n_o^3 \cdot r_{63} \cdot U \ . \qquad \text{(IV.3.13)}$$

Tu $U = E \cdot d$ jest różnica potencjałów między okładkami metalowymi.
Jeżeli różnica dróg optycznych jest równa $\lambda / 2$, to ze wzoru (IV.3.13) otrzymujemy

$$U_{\lambda/2} = \frac{\lambda}{2r_{63} \cdot n_0^3} \ . \qquad \text{(IV.3.14)}$$

Przykład IV.3.2. Modulacja światła może być również zrealizowana w oparciu o efekt Kerra. Rozważmy działania takiego urządzenia na przykładzie sześcianu wyciętego z kryształu klasy $m3m$. Krawędzi sześcianu są równoległe do osi 4 – krotnych kryształu.

W kryształach klasy $m3m$ tensor współczynników Kerra R_{mn} ma trzy niezerowe składowe (patrz zadanie 2): $R_{12} = R_{13} = R_{21} = R_{23} = R_{31} = R_{32}$, $R_{11} = R_{22} = R_{33}$, $R_{44} = R_{55} = R_{66}$. Jeżeli pole elektryczne zostało przyłożone wzdłuż osi Ox_1, ze wzoru (IV.3.5) mamy

$$\Delta\eta_1 = R_{11} \cdot E^2, \ \Delta\eta_2 = \Delta\eta_3 = R_{12} \cdot E_1^2, \ \Delta\eta_4 = \Delta\eta_5 = \Delta\eta_6 = 0 \ . \qquad \text{(IV.3.15)}$$

Biorąc pod uwagę (IV.3.15), otrzymujemy równanie dla indykatrysy optycznej

$$\begin{aligned}&(\eta_o + \Delta\eta_1)x_1^2 + (\eta_o + \Delta\eta_2)x_2^2 + (\eta_o + \Delta\eta_3)x_3^2 \\ &= (\eta_o + R_{11} \cdot E^2) \cdot x_1^2 + (\eta_o + R_{12} \cdot E_1^2) \cdot (x_2^2 + x_3^2) = 1\end{aligned} \quad , \qquad \text{(IV.3.16)}$$

gdzie $\eta_o = 1/n_o^2$; n_o - współczynnik załamania kryształu.

Ze wzoru (IV.3.16) wynika, że główne współczynniki załamania światła są równe

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta_o + \Delta\eta_1}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_o}}\left(1 + \frac{\Delta\eta_1}{\eta_o}\right)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_o}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\eta_1}{\eta_o}\right) = n_o - \frac{1}{2}n_o^3 \cdot R_{11} \cdot E^2 \quad ,$$

$$n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{\eta_o + \Delta\eta_2}} = \frac{1}{\sqrt{\eta_o}}\left(1 + \frac{\Delta\eta_2}{\eta_o}\right)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\eta_o}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\eta_2}{\eta_o}\right) = n_o - \frac{1}{2}n_o^3 \cdot R_{12} \cdot E^2 \quad .$$

Ponieważ $n_2 = n_3$ dwójłomność światła będzie niezerowa tylko dla światła rozchodzącego się w kierunku prostopadłym do kierunku pola elektrycznego. A więc modulator światła będzie działał tylko na zasadzie poprzecznego efektu Kerra.

Zadania do § IV.3

1 Wykazać, że macierz współczynników elektrooptycznych kryształów klasy $\bar{4}2m$ ma postać

$$[r_{mk}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix} .$$

2. Wykazać, że macierz współczynników Kerra kryształów klasy $m3m$ ma postać

$$[R_{mn}] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{11} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{12} & R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{44} \end{bmatrix} .$$

3. Płytka kryształu soli Siegnette'a (grupa punktowa - 222) wycięta prostopadle do osi dwukrotnej została umieszczona w polu elektrycznym. Wykazać, że nowe współczynniki załamania światła są równe

$$n_1' = n_1 \ ,$$

$$(n_2')^{-2} = n_2^{-2} + \frac{r_{41}^2 E^2}{n_2^{-2} - n_3^{-2}} \ ,$$

$$(n_3')^{-2} = n_3^{-2} + \frac{r_{41}^2 E^2}{n_2^{-2} - n_3^{-2}} \ .$$

4. Wykazać, że współczynniki załamania światła płytki wyciętej z kryształu sfalerytu (ZnS , punktowa grupa - $\bar{4}3m$) tak, że oś płytki pokrywa się z kierunkiem $[111]$ i umieszczonej w polu elektrycznym są równe

$$n_1' = n_2' = n_o + \frac{1}{2\sqrt{3}} n_o^3 r_{41} E \ ,$$

$$n_3' = n_o - \frac{1}{2\sqrt{3}} n_o^3 r_{41} E \ .$$

IV.4 Aktywność optyczna

Zdolność niektórych kryształów do skręcania płaszczyzny polaryzacji światła nazywa się **aktywnością optyczną**. Zjawisko skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła zachodzi w kryształach optyczne izotropowych (układu regularnego), jak również w kryształach jedno i dwuosiowych i obserwuje się w kryształach w których występuje **dyspersja przestrzenna wektora polaryzacji elektrycznej** $\vec{P}(\vec{r},t)$. Dyspersja przestrzenna wektora polaryzacji $\vec{P}(\vec{r},t)$ polega na tym, że wektor polaryzacji elektrycznej w punkcie, określonym wektorem wodzącym $\vec{r}$, zależy nie tylko od wektora natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ w tym punkcie, ale zależy również od przestrzennych pochodnych wektora $\vec{E}$

$$P_i = \varepsilon_0 \zeta_{ij} E_j + \varepsilon_0 \beta_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} \ . \qquad \text{(IV.4.1)}$$

W optyce kryształów dogodnej jest rozważać zamiast zależności (IV.4.1), zależność natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ od wektora indukcji elektrycznej $\vec{D}$

$$E_i = \eta_0 \eta_{ij} D_j + \eta_0 \xi_{ijk} \frac{\partial D_j}{\partial x_k} \ . \qquad \text{(IV.4.2)}$$

Uwzględniając, ze dla fali płaskiej $\vec{D}(\vec{r},t) = \vec{D}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$

$$\frac{\partial D_j}{\partial x_l} = ik_l \cdot D_j \ ,$$

wzór (IV.4.2) możemy zapisać w postaci

$$E_i = \eta_0 \tilde{\eta}_{ij} \cdot D_j \ , \tag{IV.4.3}$$

gdzie

$$\tilde{\eta}_{ij} = \eta_{ij} + i\xi_{ijm} k_m \ . \tag{IV.4.4}$$

Z porównania (IV.4.3), (IV.4.4) z równaniem materialnym (IV.1.19b) ($E_i = \eta_0 \eta_{ij} D_j$) widzimy, że przestrzenna dyspersja wektora polaryzacji powoduje, że tensor nieprzenikalności dielektrycznej staje się zależny od wektora falowego $\vec{k}$ i część tensora $\tilde{\eta}_{ij}$ zależna od $\vec{k}$ jest urojona.

Tensor nieprzenikalności określa, jak wiemy, główne współczynniki załamania światła, które są wielkościami rzeczywistymi. A zatem, aby tensor $\tilde{\eta}_{ij}$ miał rzeczywiste wartości własne, macierz z składowych tensora $\tilde{\eta}_{ij}$ powinna być macierzą hermitowską [5,22]

$$\tilde{\eta}_{ij} = \tilde{\eta}^*_{ji} \ . \tag{IV.4.5}$$

Ze wzoru (IV.4.4) wtedy wynika, że tensor ξ_{ijm} jest tensorem antysymetrycznym względem permutacji pierwszych dwóch wskaźników

$$\xi_{ijm} = -\xi_{jim} \ . \tag{IV.4.6}$$

Uwzględniając wzór (IV.4.6) dla składowych wektora $\tilde{E}_i = \eta_0 \xi_{ijm} k_m \cdot D_j$ mamy

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= \eta_0 (\xi_{12m} \cdot D_2 - \xi_{31m} \cdot D_3) \cdot k_m \ , \\ \tilde{E}_2 &= \eta_0 (-\xi_{12m} \cdot D_1 + \xi_{23m} \cdot D_3) \cdot k_m \ , \\ \tilde{E}_3 &= \eta_0 (\xi_{31m} \cdot D_1 - \xi_{23m} \cdot D_2) \cdot k_m \ . \end{aligned} \tag{IV.4.7}$$

Wprowadzając wektor $\vec{g}$ o składowych

$$g_1 = \xi_{23m} \cdot k_m \ , \ g_2 = \xi_{31m} \cdot k_m \ , \ g_3 = \xi_{12m} \cdot k_m \ , \tag{IV.4.8}$$

zapiszmy wzór (IV.4.7) w postaci

$$\tilde{\vec{E}} = \eta_0 \cdot [\vec{D} \times \vec{g}] \ . \tag{IV.4.9}$$

Skorzystamy teraz z tożsamości

$$[\vec{a} \times \vec{b}]_l = \varepsilon_{lij} \cdot a_i b_j \ . \qquad \text{(IV.4.10)}$$

Tu ε_{lij} jest symbolem permutacyjny Levi-Civity. Jeżeli ciąg wskaźników l,i,j jest parzystą permutacją ciągu liczb $1,2,3$, to $\varepsilon_{lij} = +1$; jeżeli ciąg wskaźników l,i,j jest permutacją nieparzystą ciągu $(1,2,3)$, to $\varepsilon_{lij} = -1$. Jeżeli co najmniej dwa wskaźniki są jednakowe, to $\varepsilon_{lij} = 0$.

Używając symbolu Levi-Civity wzór (IV.4.9) możemy zapisać w postaci

$$\widetilde{E}_i = \eta_0 \varepsilon_{ilj} \cdot D_l g_j \ . \qquad \text{(IV.4.11)}$$

Biorąc pod uwagę, że $\vec{k} = (2\pi/\lambda) \cdot \vec{k}_0$ ($\left|\vec{k}_0\right| = 1$), zapiszmy składowe wektora $\vec{g}$ w postaci

$$g_1 = G_{1n} \cdot k_{0n} \ , \ g_2 = G_{2n} \cdot k_{0n} \ , \ g_3 = G_{3n} \cdot k_{0n} \ , \qquad \text{(IV.4.12)}$$

gdzie

$$G_{1n} = (2\pi/\lambda)\xi_{23n} \ , \ G_{2n} = (2\pi/\lambda)\xi_{31n} \ , \ G_{3n} = (2\pi/\lambda)\xi_{12n} \ .$$

Uwzględniając wzory (IV.4.11) i (IV.4.12), wzór (IV.4.3) możemy zapisać w postaci

$$E_i = \eta_0(\eta_{il} + i\varepsilon_{ilj} \cdot G_{jn} k_{0n}) \cdot D_l \ . \qquad \text{(IV.4.13)}$$

Korzystając z równania (IV.4.13), rozważmy teraz zjawisko aktywności optycznej na przykładzie fali rozchodzącej się w dowolnie wybranym kierunku w krysztale. Wybierzmy oś Ox_3 prawoskrętnego układu współrzędnych wzdłuż kierunku rozchodzącej się fali. Przekrój indykatrysy optycznej płaszczyzną x_1Ox_2 w ogólnym przypadku ma kształt elipsy. Wybierając osi Ox_1 i Ox_2 wzdłuż głównych osi tej elipsy i korzystając ze wzorów (IV.1.17) i (IV.4.13), zamiast wzorów (IV.1.21) otrzymujemy następujący układ równań na D_1 i D_2

$$D_1\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n^2}\right) + iG_{33}D_2 = 0 \ , \qquad \text{(IV.4.14a)}$$

$$-iG_{33}D_1 + D_2\left(\frac{1}{n_{02}^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 0 \ , \qquad \text{(IV.4.14b)}$$

gdzie $n_{01}^{-2} = \eta_{11}$, $n_{02}^{-2} = \eta_{22}$ i n_{01}, n_{02} są współczynniki załamania, które miałaby fala świetlna, w przypadku nie występowania w krysztale dyspersji przestrzennej wektora polaryzacji.

Układ równań (IV.4.14) ma niezerowe rozwiązanie jeżeli

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n^2} & iG_{33} \\ -iG_{33} & \frac{1}{n_{02}^2} - \frac{1}{n^2} \end{vmatrix} = \tag{IV.4.15}$$

$$= (n^{-2})^2 - n^{-2}(n_{01}^{-2} + n_{02}^{-2}) + (n_{01}^{-2} n_{02}^{-2} - G_{33}^2) = 0$$

Z rozwiązania równania (IV.4.15) otrzymujemy

$$n_1^{-2} = n_{01}^{-2} - \frac{1}{2}[(n_{01}^{-2} - n_{02}^{-2}) - \sqrt{(n_{01}^{-2} - n_{02}^{-2})^2 + 4G_{33}^2}] , \tag{IV.4.16a}$$

$$n_2^{-2} = n_{02}^{-2} + \frac{1}{2}[(n_{01}^{-2} - n_{02}^{-2}) - \sqrt{(n_{01}^{-2} - n_{02}^{-2})^2 + 4G_{33}^2}] . \tag{IV.4.16b}$$

Wprowadzając wielkość

$$\rho = \frac{1}{2G_{33}}[\sqrt{(n_{01}^{-2} - n_{02}^{-2})^2 + 4G_{33}^2} - (n_{01}^{-2} - n_{02}^{-2})] , \tag{IV.4.17}$$

wzory (IV.4.16) możemy zapisać w postaci

$$n_1^{-2} = n_{01}^{-2} + \rho \cdot G_{33} , \tag{IV.4.18a}$$

$$n_2^{-2} = n_{02}^{-2} - \rho \cdot G_{33} . \tag{IV.4.18b}$$

Ponieważ $|G_{33}| << 1$, ze wzorów (IV.4.18) mamy

$$n_1 = n_{01} \cdot (1 + \rho \cdot G_{33} \cdot n_{01}^2)^{-1/2} \cong n_{01} - \frac{1}{2} n_{01}^3 \rho \cdot G_{33} , \tag{IV.4.19a}$$

$$n_2 = n_{02} \cdot (1 - \rho \cdot G_{33} \cdot n_{01}^2)^{-1/2} \cong n_{02} + \frac{1}{2} n_{01}^3 \rho \cdot G_{33} , \tag{IV.4.19b}$$

Każdy współczynnik załamania będzie miał swój wektor własny $\vec{D}$. Własne wektory $\vec{D}^{(1),(2)}$, odpowiadające współczynnikom n_1 i n_2 znajdziemy podstawiając n_1 i n_2 ze wzorów (IV. 4.18) do układu równań (IV.4.14).

$$D_1^{(1),(2)}(\mp\rho \cdot G_{33}) + iG_{33} D_2^{(1),(2)} = 0 , \tag{IV.4.20a}$$

$$-iG_{33} D_1^{(1),(2)} + D_2^{(1),(2)}(\mp\rho \cdot G_{33}) = 0 . \tag{IV.4.20b}$$

Ze wzorów (IV.4.20) wynika, że

$$\frac{D_2^{(1)}}{D_1^{(1)}} = \frac{D_1^{(2)}}{D_2^{(2)}} = -i\rho \quad . \tag{IV.4.21}$$

Uwzględniając wzór (IV.4.21), mamy

$$\vec{D}^{(1)} = D^{(1)} \cdot (\vec{e}_1 - i\rho \cdot \vec{e}_2) \cdot \exp[i(k^{(1)}x_3 - \omega t + \varphi^{(1)})] \ , \tag{IV.4.22a}$$

$$\vec{D}^{(2)} = D^{(2)} \cdot (-i\rho \cdot \vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot \exp[i(k^{(2)}x_3 - \omega t + \varphi^{(2)})] \ , \tag{IV.4.22b}$$

gdzie $k^{(\alpha)} = \omega \cdot n_\alpha / c$ $(\alpha = 1,2)$.

Wektory indukcji elektrycznej to są rzeczywistymi składowymi tych wektorów, a zatem

$$\mathrm{Re}\,\vec{D}^{(1)} = D^{(1)}[\vec{e}_1 \cdot \cos(k^{(1)}x_3 - \omega t + \varphi^{(1)}) + \rho \cdot \vec{e}_2 \cdot \sin(k^{(1)}x_3 - \omega t + \varphi^{(1)})] \ , \tag{IV.4.23a}$$

$$\mathrm{Re}\,\vec{D}^{(2)} = D^{(2)}[\rho \cdot \vec{e}_1 \cdot \sin(k^{(2)}x_3 - \omega t + \varphi^{(2)}) + \cdot \vec{e}_2 \cdot \cos(k^{(2)}x_3 - \omega t + \varphi^{(2)})] \ . \tag{IV.4.23b}$$

Ze wzorów (IV.4.23) wynika, że te dwie fale są spolaryzowane eliptycznie. Przypuśćmy, że $\rho > 0$. Jeżeli patrzyć na fale (IV.4.23) od strony osi Ox_3, czyli od strony obserwatora, do którego oka wpada światło, to koniec wektora indukcji elektrycznej fali (IV.4.23b) porusza się po elipsie zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Mówimy, że fala (IV.4.23b) jest spolaryzowana **prawoskrętne**. Wektor indukcji fali (IV.4.23a) porusza się po elipsie przeciwnie z ruchem wskazówek zegara. Taką falę nazywamy spolaryzowaną **lewoskrętne**.

Rozważmy teraz rozchodzenie się fali świetlnej wzdłuż osi optycznej. W tym przypadku $n_{01} = n_{02} \equiv n_o$ i ze wzorów (IV.17) i (IV.19) otrzymujemy

$$\rho = \frac{|G_{33}|}{G_{33}} \ , \tag{IV.4.24}$$

$$n_{1,2} \cong n_o \mp \frac{1}{2} n_o^3 |G_{33}| \ . \tag{IV.4.25}$$

Fala świetlna wchodząca do kryształu zwykle jest płasko spolaryzowana. Niech fala ta jest spolaryzowana wzdłuż osi Ox_1. W krysztale falę płasko spolaryzowaną można rozłożyć na dwie fale spolaryzowane kołowo. Jedna z tych fal będzie falą prawoskrętną

$$\vec{e}_1 \cdot \cos(k^{(r)}x_3 - \omega t) + \vec{e}_2 \cdot \sin(k^{(r)}x_3 - \omega t) \ , \tag{IV.4.26a}$$

zaś druga fala będzie falą lewoskrętną

$$\vec{e}_1 \cdot \cos(k^{(l)}x_3 - \omega t) - \vec{e}_2 \cdot \sin(k^{(l)}x_3 - \omega t) \ . \tag{IV.4.26b}$$

Prędkości tych fal są różne i równe odpowiednio $\omega / k^{(r)}$ i $\omega / k^{(l)}$. Dwie spolaryzowane kołowo fale po wyjściu z płytki krystalicznej o grubości d tworzą znów jedną falę, której polaryzację określa wektor

$$\begin{aligned} &\vec{e}_1 \cdot [\cos(k^{(l)} d - \omega t) + \cos(k^{(r)} d - \omega t)] \\ &- \vec{e}_2 \cdot [\sin(k^{(l)} d - \omega t) - \sin(k^{(r)} d - \omega t)] \\ &= 2\cos[(\frac{k^{(r)} + k^{(l)}}{2}) \cdot d - \omega t] \\ &\times [\vec{e}_1 \cdot \cos(\frac{k^{(l)} - k^{(r)}}{2} d) - \vec{e}_2 \cdot \sin(\frac{k^{(l)} - k^{(r)}}{2} d)] \end{aligned} \quad . \qquad \text{(IV.4.27)}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{k^{(l)} - k^{(r)}}{2} = \frac{\omega}{2c}(n_2 - n_1) = \frac{\omega}{2c} \cdot |G_{33}| \cdot n_o^3 = \frac{\pi n_0^3 |G_{33}|}{\lambda} \ ,$$

$$\frac{k^{(l)} + k^{(r)}}{2} = \frac{\omega}{2c}(n_2 + n_1) = \frac{\omega \cdot n_o}{c} \ ,$$

ze wzoru (IV.4.27) dla wektora polaryzacji fali na wyjściu z kryształu otrzymujemy

$$(\vec{e}_1 \cdot \cos\psi - \vec{e}_2 \cdot \sin\psi) \cdot \cos[\omega \cdot (t - \frac{n_o d}{c})] \ , \qquad \text{(IV.4.28)}$$

gdzie

$$\psi = \frac{\pi n_o^3 |G_{33}|}{\lambda} \cdot d \ . \qquad \text{(IV.4.29)}$$

Ze wzoru (IV.4.28) wynika, że spolaryzowana wzdłuż osi Ox_1 fala po wyjściu z kryształu znów będzie płasko spolaryzowana. Jednak kierunek polaryzacji fali jest skręcony o kąt ψ w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Jeżeli skręcenie płaszczyzny polaryzacji, widziane od strony obserwatora jest zgodne z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, to skręcanie nazywamy **prawoskrętnym**, a odpowiednie kryształy nazywamy **kryształami prawoskrętnymi**. W przeciwnym przypadku skręcanie płaszczyzny polaryzacji światła nazywamy **lewoskrętnym**, a odpowiednie kryształy nazywamy **lewoskrętnymi**.

Aktywność optyczną różnych kryształów możemy porównać wprowadzając pojęcie **zdolności skręcającej kryształu**. Zdolność skręcająca kryształu δ jest równa skręceniu płaszczyzny polaryzacji światła przypadającemu na jednostkę drogi w danym krysztale

$$\delta = \frac{\psi}{d} = \frac{\pi n_o^3 G_{33}}{\lambda} \quad . \tag{IV.4.30}$$

Tensor G_{jn}, określający zdolności skręcania płaszczyzny polaryzacji światła w krysztale nazywa się **tensorem skręcania**.

Zadania do §IV.4

1. Wykazać, że tensor skręcania G_{jn} jest pseudotensorem drugiego rzędu, czyli przy przejściu od jednego układu współrzędnych do drugiego składowe tego tensora transformują się zgodnie z prawem

$$G_{i'j'} = \pm \alpha_{i'i} \alpha_{j'j} G_{ij} \quad .$$

2. Wykazać, że kryształ, w którym występuje środek symetrii, nie może być optycznie aktywny.

3. Udowodnić, że tensor skręcania G_{jn} w kryształach klasy m przy $Ox_2 \perp m$ ma postać

$$\begin{bmatrix} 0 & G_{12} & 0 \\ G_{12} & 0 & G_{23} \\ 0 & G_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

4. Wykazać, że jedna z głównych osi tensora skręcania G_{jn} w kryształach klasy m leży w płaszczyźnie symetrii, a dwie drugie osi tworzą kąt 45^0 z płaszczyzną symetrii. Udowodnić również, że tensor w układzie swoich osi głównych ma postać

$$\begin{bmatrix} +\sqrt{G_{12}^2 + G_{23}^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{G_{12}^2 + G_{23}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

5. Rozważyć optyczną aktywność kryształu jednoosiowego w przypadku gdy kierunek rozchodzenia się fali nie pokrywa się z kierunkiem osi optycznej. Wykazać, że w tym przypadku w krysztale rozchodzą się dwie fali spolaryzowane eliptyczne.