

## ROZDZIAŁ III

### Właściwości sprężyste kryształów

#### III.1 Tensor naprężenia

Ciała stałe pod wpływem przyłożonych zewnętrznych sił ulegają określonym deformacjom, zmieniając swój kształt i objętość. Rozważmy jakiś mały element objętościowy wewnątrz ciała stałego w postaci nieskończenie małego sześcianu z krawędziami równoległymi do osi współrzędnych  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  (rys.III.1.1). Siły działające z zewnątrz na ten sześcian podzielimy na siły **powierzchniowe**, oraz siły **objętościowe** albo **masowe**. Siły masowe to są siły, które działają na wszystkie elementy sześcianu i są podobne, na przykład do sił grawitacyjnych. Natomiast, siły powierzchniowe to są siły, które działają na powierzchnie sześcianu z zewnątrz i są to zwykle siły które powstają przy ściskaniu (rozciąganiu), skręcaniu albo zginaniu ciała. Rozważmy najpierw siły powierzchniowe. Siły działające na trzy ściany wybranego sześcianu (rys.III.1.1), z zewnątrz sześcianu, możemy rozłożyć na składowe wzdłuż osi  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$

$$\vec{F}_1 = \Delta S \cdot (t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2 + t_{31}\vec{e}_3) , \quad (\text{III.1.1a})$$

$$\vec{F}_2 = \Delta S \cdot (t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2 + t_{32}\vec{e}_3) , \quad (\text{III.1.1b})$$

$$\vec{F}_3 = \Delta S \cdot (t_{13}\vec{e}_1 + t_{23}\vec{e}_2 + t_{33}\vec{e}_3) , \quad (\text{III.1.1c})$$

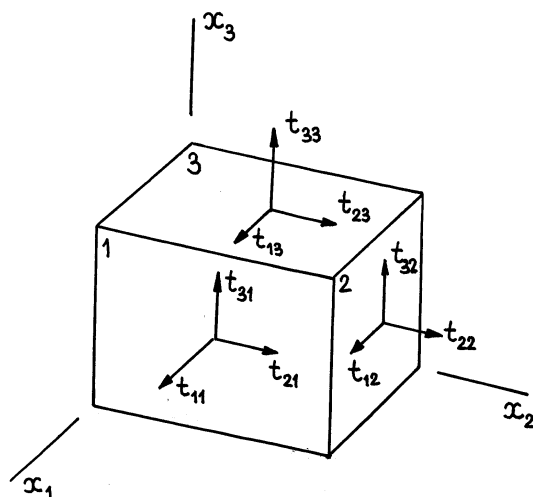
skąd dla trzech odpowiednich wektorów naprężenia  $\vec{P}_i$  (naprężeniem będziemy nazywali siłę przypadającą na jednostkę powierzchni) mamy

$$\vec{P}_i = \frac{\vec{F}_i}{\Delta S} = t_{ji}\vec{e}_j \quad (i, j = 1,2,3). \quad (\text{III.1.2})$$

Tu  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  - jednostkowe wektory wzdłuż osi współrzędnych  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$ ;  $\Delta S$  - pole powierzchni jednej ściany sześcianu.

Ze wzorów (III.1.1) i (III.1.2) widzimy, że wielkość  $t_{ij}$  określa składową siły w kierunku osi  $Ox_i$ , działającą na tę ścianę sześcianu, która jest prostopadła do kierunku osi  $Ox_j$ . Wielkości  $t_{ii}$  określają siły **normalne**, czyli siły ściskania ( $t_{ii} < 0$ ) lub rozciągania ( $t_{ii} > 0$ ).

Natomiast wielkości  $t_{ij}$  ( $i \neq j$ ) określają siły **ścianania**. Zgodnie z trzecim prawem Newtona siły z którymi ściany 1, 2, 3 działają na otoczenie są równe odpowiednio siłom  $|\vec{F}_1|$ ,  $|\vec{F}_2|$ ,  $|\vec{F}_3|$  ale mają przeciwne kierunki do tych sił.

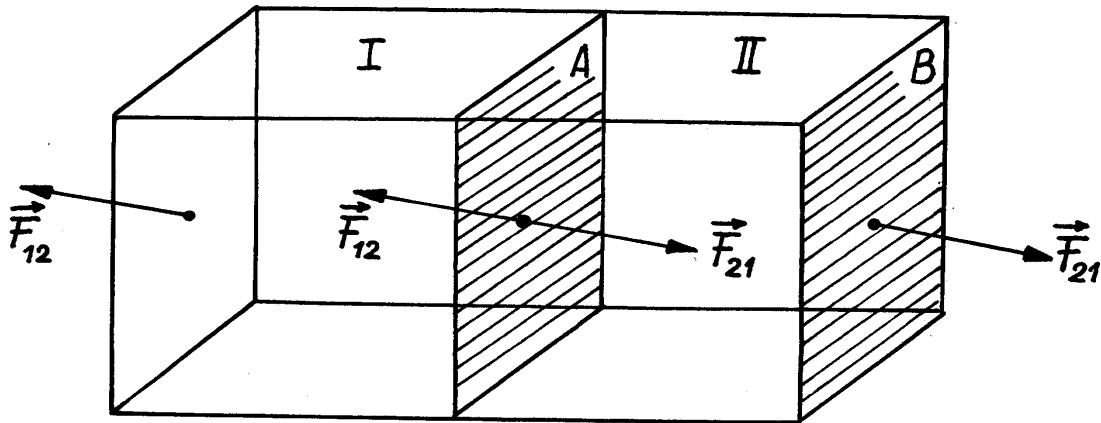


Rys.III.1.1. Siły działające na ścianki sześciangu

Naprężenie nazywamy **jednorodnym**, jeżeli siła działająca na powierzchnię jakiegoś elementu wewnątrz ciała o określonym kształcie i orientacji nie zależy od położenia tego elementu w ciele. Zatem, jeżeli naprężenie jest jednorodne, to siły działające na trzy ściany wybranego sześciangu, które znajdują się po stronie ujemnych kierunków osi współrzędnych i są nie uwidocznione na rys.III.1.1, muszą być równe co do wartości bezwzględnej siłom  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  i mieć przeciwne kierunki. Istotnie, rozważmy dwa sześciangy *I* i *II* dla których jedna ściana (*A*) jest wspólna (rys.III.1.2). Na ścianę *A* sześciangu *II* działa ze strony sześciangu *I* siła  $\vec{F}_{12}$ . Zgodnie z trzecim prawem Newtona ze strony sześciangu *II* działa na ścianę *A* sześciangu *I* siła  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ . Jednak ściana *A* sześciangu *I* jest równoważna ścianie *B* sześciangu *II* (te ściany mają ten sam kształt i orientację w ciele), a więc siła z której działa otoczenie na ścianę *B* wynosi  $(-\vec{F}_{12})$ .

Dla naprężenia jednorodnego więc siły działające na mały element objętościowy możemy określić za pomocą 9 wielkości  $t_{ij}$

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.1.3})$$



Rys.III.1.2. Siły działające na styku dwu sześcianów

Składowe  $t_{ij}$  (III.1.3) tworzą tensor drugiego rzędu, który nosi nazwę **tensora naprężenia**. Można wykazać, że tensor naprężenia jest symetrycznym tensorem [5-7]

$$t_{ij} = t_{ji}. \quad (\text{III.1.4})$$

Do opisu tensora symetrycznego drugiego rzędu  $t_{ij}$  możemy użyć geometrycznego przedstawienia w postaci kwadryki, zwanej kwadryką naprężenia

$$t_{ij}x_ix_j = 1. \quad (\text{III.1.5})$$

W układzie osi głównych tensora  $t_{ij}$  kwadryka naprężenia ma postać

$$t_1x_1^2 + t_2x_2^2 + t_3x_3^2 = 1. \quad (\text{III.1.6})$$

Składowe  $t_i$  nazywamy **naprężeniami głównymi**. Układ osi głównych tensora naprężenia posiada taką właściwość, iż na ściany ciała wycięte prostopadle do osi głównych działa tylko siła rozciągająca (albo ściskająca).

Tensor naprężenia  $t_{ij}$  ma najprostszą postać w dwóch przypadkach:

a) **naprężenie jednoosiowe rozciągające** przyłożone wzdłuż osi  $Ox_3$

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}; \quad (\text{III.1.7})$$

b) **ciśnienie hydrostatyczne**  $t$

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{bmatrix}. \quad (\text{III.1.8})$$

Jeżeli rozważmy w ciele stałym mały element powierzchni  $\delta S$ , to można wykazać, że

1) Naprężenie wypadkowe  $t_r$  (rys.III.1.3) działające na powierzchnię  $\delta S$  wynosi

$$t_r = \sqrt{t_{ri}^2}, \quad (\text{III.1.9a})$$

gdzie

$$t_{ri} = t_{ij}n_j \quad (\text{III.1.9b})$$

i  $n_j$  - składowe wektora jednostkowego normalnego do powierzchni  $\delta S$ .

2) Naprężenie normalne  $t_n$  (rys.III.1.3) działające na powierzchnię  $\delta S$  jest równe

$$t_n = t_{ij}n_i n_j. \quad (\text{III.1.10})$$

3) Naprężenie styczne  $t_s$  (rys.III.1.3) określa wzór

$$t_s = \sqrt{t_r^2 - t_n^2}. \quad (\text{III.1.11})$$

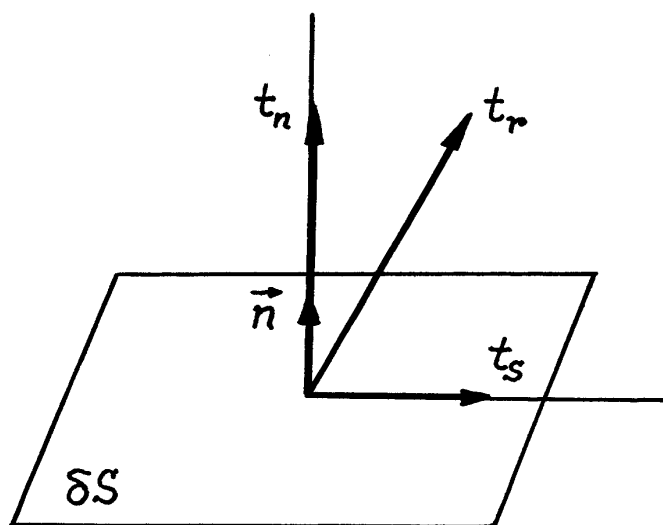
4) Maksymalne naprężenie styczne  $(t_s)_{\max}$  działające w płaszczyźnie prostopadłej do  $\vec{n}$  (jednostkowy wektor  $\vec{n}$  jest równoległy do osi  $Ox_3$ ) jest równe

$$(t_s)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{t_{11} - t_{22}}{2}\right)^2 + t_{12}^2}. \quad (\text{III.1.12})$$

5) Naprężenie średnie określa wzór

$$t_{sr} = \frac{1}{3}(t_{11} + t_{22} + t_{33}). \quad (\text{III.1.13})$$

Tensor naprężenia  $t_{ij}$  opisuje siły, które powstają wewnątrz kryształu, wskutek działania na ciało sił z zewnątrz. Wewnątrz kryształu tensor ten (kwadryka tensora) może mieć dowolną orientację, a w przypadku naprężeń niejednorodnych (patrz niżej) składowe tensora  $t_{ij}$  mogą nawet mieć różne wartości w różnych punktach ciała. Tensor naprężenia więc nie opisuje wcale właściwości fizyczne kryształu, a zatem nie podlega ograniczeniom narzucanym zasadą Neumanna. Takie tensory nazywamy **tensorami pola**.



Rys.III.1.3. Naprężenia działające na mały element powierzchni  $\delta S$  :

$t_r$  - naprężenie wypadkowe;  $t_s$  - naprężenie styczne;  $t_n$  - naprężenie normalne

Jeżeli sześcian (rys.III.1.1) jest nieskończenie mały, to możemy rozważać tensor naprężenia jako funkcję  $t_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  współrzędnych  $x_1, x_2, x_3$  określających położenie środka sześcianu. W przypadku naprężeń jednorodnych, składowe tensora  $t_{ij}$  nie zależą od położenia punktu w kryształ. Naprężenia nazywamy **niejednorodnymi** jeżeli składowe tensora naprężenia zmieniają się od punktu do punktu.

Rozpatrzmy wewnątrz ciała, w którym występują naprężenia niejednorodne, nieskończenie mały sześcian. Niech  $t_{ij}(x_{10}, x_{20}, x_{30}) \equiv t_{ij}(0)$  jest tensorem naprężenia w środku sześcianu. Znajdziemy siły działające w kierunku osi  $Ox_1$  na dwóch ściankach prostopadłych do osi  $Ox_1$  (rys.III.1.4). Przyпускаjąc, iż długości ( $2\delta l$ ) krawędzie sześcianu są dość małe,

dla składowych  $t_{11}(x_1, x_2, x_3)$  tensora naprężenia w punktach  $(x_{10} + \delta l, x_{20}, x_{30})$  i  $(x_{10} - \delta l, x_{20}, x_{30})$  możemy zapisać

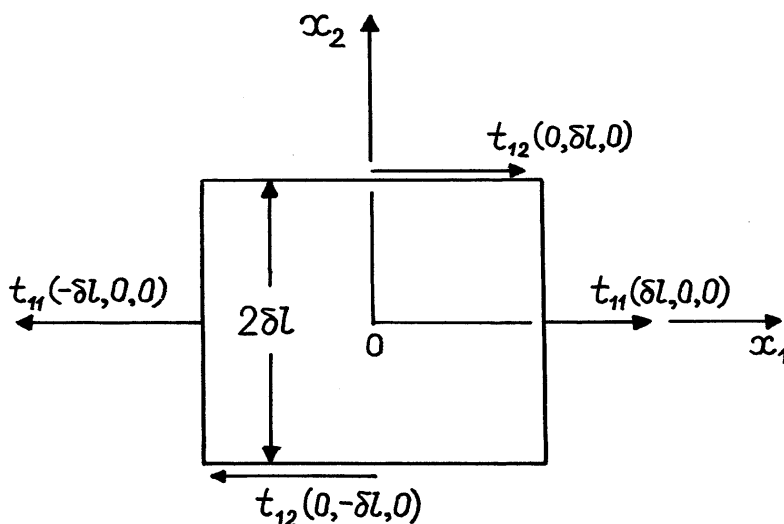
$$t_{11}(x_{10} + \delta l, x_{20}, x_{30}) = t_{11}(0) + \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} \delta l, \quad (\text{III.1.14a})$$

$$t_{11}(x_{10} - \delta l, x_{20}, x_{30}) = t_{11}(0) + \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} (-\delta l) \quad . \quad (\text{III.1.14b})$$

Uwzględniając kierunki sił (rys.III.1.4), otrzymujemy dla wypadkowej siły działającej na ściankach prostopadłych do osi  $Ox_1$  następujący wzór

$$(2\delta l)^2 \cdot [t_{11}(0) + \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} \delta l] - (2\delta l)^2 \cdot [t_{11}(0) - \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} \delta l] = \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} \cdot \delta V, \quad (\text{III.1.15})$$

gdzie  $\delta V = (2\delta l)^3$  - objętość sześcianu.



Rys.III.1.4. Siły działające w kierunku osi  $Ox_1$  na ściankach prostopadłych do osi  $Ox_1$  i  $Ox_2$

Postępując w podobny sposób znajdziemy siły wypadkowe działające w kierunku osi  $Ox_1$  na ściankach prostopadłych do osi  $Ox_2$  i  $Ox_3$

$$\frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} \cdot \delta V \quad \text{i} \quad \frac{\partial t_{13}}{\partial x_3} \cdot \delta V \quad . \quad (\text{III.1.16})$$

Sumując (III.1.15) i (III.1.16) otrzymujemy siłę działającą na cały sześcian w kierunku osi  $Ox_1$

$$\left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{13}}{\partial x_3}\right) \cdot \delta V . \quad (\text{III.1.17})$$

Zgodnie z drugim prawem Newtona ta siła jest związana z masą  $m$  i przyspieszeniem w kierunku osi  $Ox_1$  sześcianu równaniem

$$\left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{13}}{\partial x_3}\right) \cdot \delta V = m \frac{d^2 x_1}{dt^2} . \quad (\text{III.1.18})$$

Oznaczając przez  $\rho = m/\delta V$  - gęstość ciała, otrzymujemy równanie ruchu elementu objętościowego  $\delta V$  w kierunku osi  $Ox_1$

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{13}}{\partial x_3} = \rho \frac{d^2 x_1}{dt^2} . \quad (\text{III.1.19a})$$

W podobny sposób otrzymujemy następujące równania ruchu elementu objętościowego  $\delta V$  w kierunku osi  $Ox_2$  i  $Ox_3$

$$\frac{\partial t_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{23}}{\partial x_3} = \rho \frac{d^2 x_2}{dt^2} , \quad (\text{III.1.19b})$$

$$\frac{\partial t_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{33}}{\partial x_3} = \rho \frac{d^2 x_3}{dt^2} . \quad (\text{III.1.19c})$$

Trzy równania (III.1.19) możemy zapisać w postaci jednego równania

$$\frac{\partial t_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{i3}}{\partial x_3} = \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} , \quad (i = 1,2,3) . \quad (\text{III.1.20a})$$

Jeżeli oprócz sił powierzchniowych na sześcian działają również siły masowe  $F_{im}$ , to uogólnieniem równania (III.1.20a) będzie równanie

$$\frac{\partial t_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{i3}}{\partial x_3} + F_{im} = \rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} , \quad (i = 1,2,3) . \quad (\text{III.1.20b})$$

Równania (III.1.20) są **fundamentalnymi równaniami teorii sprężystości**. W przypadku gdy  $d^2 x_i/dt^2 = 0$ , ze wzoru (III.1.20b) otrzymujemy równanie, które powinny spełniać składowe

tensora naprężenia dla tego żeby wszystkie części ciała znajdowały się w stanie równowagi statycznej

$$\frac{\partial t_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{i3}}{\partial x_3} + F_{im} = 0, \quad (i = 1,2,3) . \quad (\text{III.1.21})$$

Równanie (III.1.21) nosi nazwę **równania równowagi ciała**.

*Przykład III.1.1.* Udowodnimy, że przy odpowiednim wyborze osi współrzędnych naprężenie może być przedstawione jako suma naprężenia hydrostatycznego i naprężenia, którego wszystkie składowe przekątne równe zero (naprężenia ścinające).

Przedstawmy tensor naprężenia  $t_{ij}$  w postaci

$$t_{ij} = t \cdot \delta_{ij} + \tau_{ij} , \quad (\text{III.1.22a})$$

gdzie

$$t = \frac{1}{3}(t_{11} + t_{22} + t_{33}) \quad (\text{III.1.22b})$$

jest śladem tensora naprężenia  $t_{ij}$ .

Naprężenie  $(t \cdot \delta_{ij})$  nosi nazwę naprężenia hydrostatycznego, ponieważ pozostaje przy transformacji osi współrzędnych niezmiennione. Tensor  $\tau_{ij}$  posiada taką właściwość, że, jak wynika ze wzoru (III.1.22a), ślad (suma przekątnych elementów macierzy  $\tau_{ij}$ ) jest równa zero. Łatwo wykazać, że ślad tensora drugiego rzędu jest niezmiennikiem (inwariantem) względem przekształceń osi współrzędnych. Skorzystamy właśnie z tej właściwości śladu tensora drugiego rzędu.

Tensor  $\tau_{ij}$  podobnie do tensora  $t_{ij}$  jest tensorem symetrycznym ( $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ), a zatem zawsze możemy sprowadzić go do układu osi głównych

$$\begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{bmatrix} . \quad (\text{III.1.23})$$

Ponieważ ślad tensora  $\tau_{ij}$  jest równy zero, spośród głównych składowych  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  tensora  $\tau_{ij}$  muszą być dodatnie i ujemnie składowe. Przypuśćmy, że  $\tau_1 < 0$ , a  $\tau_2 > 0$ . Obróćmy teraz



układ osi głównych  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  tensora  $\tau_{ij}$  o kąt  $\varphi$  dookoła osi  $Ox_3$ . Nowe składowe tensora  $\tau'_{ij}$ , odniesione do osi  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3 \equiv Ox_3$  znajdziemy stosując wzory (II.1.23)

$$\tau'_{11} = \alpha_{1'1}\alpha_{1'1}\tau_1 + \alpha_{1'2}\alpha_{1'2}\tau_2 = \tau_1 \cos^2 \varphi + \tau_2 \sin^2 \varphi, \quad (\text{III.1.24a})$$

$$\tau'_{22} = \alpha_{2'1}\alpha_{2'1}\tau_1 + \alpha_{2'2}\alpha_{2'2}\tau_2 = \tau_1 \sin^2 \varphi + \tau_2 \cos^2 \varphi, \quad (\text{III.1.24b})$$

$$\tau'_{12} = \alpha_{1'1}\alpha_{2'1}\tau_1 + \alpha_{1'2}\alpha_{2'2}\tau_2 = -\tau_1 \cos \varphi \sin \varphi + \tau_2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad (\text{III.1.24c})$$

$$\tau'_{13} = \tau'_{23} = 0, \quad \tau'_{33} = \tau_3, \quad (\text{III.1.24d})$$

Równania (III.1.24) możemy zapisać w następujący sposób

$$\tau'_{11} = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) - \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1) \cdot \cos 2\varphi, \quad (\text{III.1.25a})$$

$$\tau'_{22} = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) + \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1) \cdot \cos 2\varphi, \quad (\text{III.1.25b})$$

$$\tau'_{12} = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1) \cdot \sin 2\varphi, \quad (\text{III.1.25c})$$

Ze wzoru (III.1.25a) widzimy, że jeżeli wybierzemy kąt  $\varphi$  tak, żeby było spełnione równanie

$$\cos 2\varphi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}, \quad (\text{III.1.26})$$

to

$$\tau'_{11} = 0, \quad \tau'_{22} = \tau_1 + \tau_2, \quad \tau'_{12} = \sqrt{|\tau_1 \cdot \tau_2|} \equiv \tau. \quad (\text{III.1.27})$$

Zatem po obrocie układu współrzędnych o kąt  $\varphi$  (III.1.26) tensor  $\tau'_{ij}$  przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & -\tau_3 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.1.28})$$

Obróćmy teraz układ współrzędnych  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$  o kąt  $\gamma$  dookoła osi  $Ox'_1$ . Znow stosując wzory (II.1.23) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tau''_{11} &= 0, & \tau''_{22} &= -\tau''_{33} = -\tau_3 \cos 2\gamma, \\ \tau''_{12} &= \tau \cos \gamma, & \tau''_{13} &= -\tau \sin \gamma, & \tau''_{23} &= \tau_3 \sin 2\gamma. \end{aligned} \quad (\text{III.1.29})$$

Ze wzorów (III.1.29) znajdujemy, że przy  $\gamma = \pi / 2$  w układzie współrzędnych  $Ox_1'' = Ox_1'$ ,  $Ox_2''$ ,  $Ox_3''$  tensor  $\tau_{ij}''$  ma postać

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau / \sqrt{2} & -\tau / \sqrt{2} \\ \tau / \sqrt{2} & 0 & \tau_3 \\ -\tau / \sqrt{2} & \tau_3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.1.30})$$

Wykazaliśmy więc, że dla dowolnego naprężenia zawsze istnieje układ współrzędnych  $(Ox_1'', Ox_2'', Ox_3'')$  w którym naprężenie może być przedstawione jako suma naprężenia hydrostatycznego i naprężenia ścinającego.

*Przykład III.1.2.* Na końcu długiego pionowo umocowanego pręta jest zawieszony ciężar. W określonym układzie współrzędnych  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  kierunek osi pręta ma składowe  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  ( $|\vec{n}| = 1$ ). Znajdziemy postać tensora naprężenia w układzie  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$ .

Wyberzemy układ współrzędnych  $Ox_1'$ ,  $Ox_2'$ ,  $Ox_3'$  oś  $Ox_3'$  którego pokrywa się z kierunkiem działania pary sił, spowodowanych zawieszonym na pręcie ciężarze. W wybranym „primowanym” układzie współrzędnych tensor naprężenia  $t_{ij}'$  będzie miał postać

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}. \quad (\text{III.1.31})$$

Tu  $(t \cdot \Delta S)$  jest siłą, która działa na pręt ze strony ciężaru ( $\Delta S$  - pole powierzchni przekroju pręta).

Żeby znaleźć postać tensora naprężenia  $t_{ij}$  w układzie „nieprimowanym”  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$ , skorzystamy z prawa transformacji tensora drugiego rzędu (patrz wzór (II.1.23))

$$t_{ij} = \alpha_{3'i} \alpha_{3'j} t_{33}' \equiv \alpha_{3'i} \alpha_{3'j} \cdot t.$$

Uwzględniając, że

$$\alpha_{3'i} = (\vec{e}_3' \cdot \vec{e}_i) = (\vec{n} \cdot \vec{e}_i) = n_i$$

otrzymujemy tensor naprężenia  $t_{ij}$  w układzie współrzędnych  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$

$$t \cdot \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{III.1.32})$$

### Zadania do § III.1

1. Wykazać, że wielkości  $t_{ij}$  (III.1.3) określające siły działające na mały element objętościowy tworzą tensor drugiego rzędu.
2. Udowodnić wzory (III.1.10), (III.1.11), (III.1.12) i (III.1.13).
3. Naprężenia występujące w kryształach określa tensor naprężenia

$$[t_{ij}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}.$$

Obliczyć naprężenie normalne  $t_n$  i styczne  $t_s$  działające na mały element powierzchni  $\delta S$ , w przypadku gdy wektor prostopadły do powierzchni  $\delta S$  leży w płaszczyźnie  $x_1 O x_2$  i tworzy kąt  $\alpha$  z osią  $Ox_1$ .

*Odpowiedź:*  $t_n = t_{11} \cos^2 \alpha + t_{22} \sin^2 \alpha + t_{12} \sin 2\alpha$ ;  $t_s = (t_{22} - t_{11}) \sin 2\alpha + t_{12} \cos 2\alpha$ .

4. Tensor naprężenia jednorodnego występującego w kryształach ma postać:  $t_{11} = t_{22} / 2 = t_{33} / 3 = 10 \text{ N/cm}^2$ ;  $t_{12} = -5 \text{ N/cm}^2$ ;  $t_{13} = t_{23} = 0$ . Obliczyć: (a) wartości maksymalnego i minimalnego naprężenia normalnego; (b) kierunki jednostkowych wektorów prostopadłych do płaszczyzn na które działają maksymalne i minimalne naprężenia normalne.

*Odpowiedź:* a) maksymalna wartość normalnego naprężenia jest równa  $30 \text{ N/cm}^2$ ; minimalna wartość jest równa  $7,9 \text{ N/cm}^2$ ; b) maksymalne normalne naprężenie działa na płaszczyznę prostopadłą do osi  $Ox_3$ . Jednostkowy wektor  $\vec{n}(0,384, 0,925, 0)$  określa płaszczyznę na którą działa minimalne normalne naprężenie.

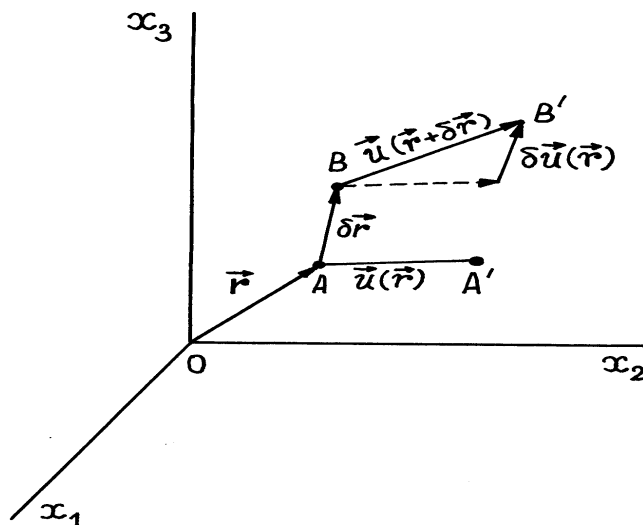
### III.2 Tensory deformacji i odkształcenia

Żeby opisać odkształcenie (deformacje) ciała stałego wprowadźmy kartezjański układ współrzędnych. Przypuśćmy, że po deformacji ciała wszystkie punkty ciała przemieściły się w nowe położenia. Jeżeli dowolny punkt  $A$  w wyniku deformacji przemieści się do położenia  $A'$ , to przemieszczenie punktu  $A$  możemy opisać wprowadzając **wektor przemieszczenia**  $\vec{u}(\vec{r})$

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{r}' - \vec{r} , \quad (\text{III.2.1})$$

gdzie  $\vec{r}$  - wektor określający położenie punktu  $A$  przed deformacją,  $\vec{r}'$  - wektor określający położenie tego samego punktu po deformacji ciała. W ogólnym przypadku wektor przemieszczenia  $\vec{u}(\vec{r})$  zależy od położenia punktu  $A$  w ciele, czyli zależy od  $\vec{r}$ .

Rozważmy teraz otoczenie punktu  $A$  o nieskończenie małej objętości (rys.III.2.1). Deformację tego małego otoczenia punktu  $A$  można traktować jako złożenie trzech ruchów: 1) przemieszczenie punktu  $A$ , wspólnie z jego otoczeniem, jako bryły sztywnej w punkt  $A'$ ; 2) obrót otoczenia punktu  $A'$ , jako bryły sztywnej, dookoła osi przechodzącej przez punkt  $A'$ ; 3) zmiana postaci (odkształcenie) otoczenia punktu  $A'$ , która składa się ze zmiany jego kształtu i objętości. Wszystkie trzy składowe deformacji ciała (otoczenia punktu) występują łącznie. Przemieszczenie punktu  $A$  wraz z otoczeniem określa wektor przemieszczenia (III. 2.1). Natomiast obrót ciała jako całości i jego odkształcenie, jak zobaczymy niżej, określone są przez pochodne wektora przemieszczenia  $\vec{u}(\vec{r})$  względem współrzędnych  $x_i$ .



Rys.III.2.1. Deformacja otoczenia punktu  $A$

Rozważmy dowolny punkt  $B$  z otoczenia punktu  $A$  położenie którego przed deformacją określa wektor  $\vec{r} + \delta\vec{r}$ . Jeżeli deformacje ciała są małe, to korzystając z rozwinięcia Taylora, składowe wektora deformacji  $\vec{u}(\vec{r} + \delta\vec{r})$  punktu  $B$  możemy zapisać w postaci

$$u_i(\vec{r} + \delta\vec{r}) = u_i(\vec{r}) + \sum_{j=1,2,3} \frac{\partial u_i(\vec{r})}{\partial x_j} \cdot \delta x_j = u_i(\vec{r}) + e_{ij} \cdot \delta x_j . \quad (\text{III.2.2})$$

Tu przez  $e_{ij}$  oznaczyliśmy

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i(\vec{r})}{\partial x_j} . \quad (\text{III.2.3})$$

Ze wzoru (III.2.2) wynika, że składowe wektora przemieszczenia  $\delta \vec{u}$  punktu  $B$  względem wybranego punktu  $A$  wynoszą

$$\delta u_i = u_i(\vec{r} + \delta \vec{r}) - u_i(\vec{r}) = e_{ij} \cdot \delta x_j . \quad (\text{III.2.4})$$

W ogólnym przypadku wielkości  $e_{ij}$  są funkcjami współrzędnych  $x_i$  punktu  $A$  przed deformacją. Deformacje będziemy nazywali **jednorodnymi** jeżeli wielkości  $e_{ij}$  są stałe i nie zależą od współrzędnych  $x_i$  rozważanego punktu ciała.

W przypadku deformacji jednorodnej są słuszne twierdzenia [5,6]:

- 1) punkty znajdujące się na jednej płaszczyźnie, po deformacji znajdują się również na jednej płaszczyźnie.
- 2) trzy punkty leżące na linii prostej przed deformacją ciała, po deformacji leżą również na linii prostej, która na ogół różni się od linii pierwotnej;
- 3) linie równoległe pozostają po deformacji ciała równoległymi względem siebie;
- 4) linie proste wykreślone w tym samym kierunku ulegają skróceniu lub wydłużeniu w tym samym stosunku;
- 5) punkty znajdujące się na powierzchni drugiego stopnia, po deformacji znajdują się również na powierzchni drugiego stopnia. Na przykład ciało w postaci kuli po deformacji może przyjąć tylko postać elipsoidy.

Dalej będziemy rozważali tylko deformacji jednorodnej. Przy deformacji jednorodnej składowe wektora przemieszczenia dowolnego punktu znajdziemy mnożąc (III.2.3) przez  $dx_j$  i sumując otrzymane wyniki względem wskaźnika  $j$

$$e_{ij} \cdot dx_j = \frac{\partial u_i(\vec{r})}{\partial x_j} dx_j \equiv du_i(\vec{r}) . \quad (\text{III.2.5a})$$

Po scałkowaniu wzory (III.2.5a) znajdujemy

$$u_i(\vec{r}) = u_i(0) + e_{ij} \cdot x_j , \quad (\text{III.2.5b})$$

Tu  $\vec{u}(0)$  jest przemieszczeniem punktu znajdującego się w początku układu współrzędnych;  $x_j$  są współrzędnymi dowolnego punktu do deformacji ciała. Wektor  $\vec{u}(0)$  określa przemieszczenie ciała jako ciała sztywnego. Odkształcenia ciała opisuje drugi wyraz w (III.

2.5b). Pomijając składowe wektora  $\vec{u}(0)$  we wzorze (III.2.5b) i biorąc pod uwagę wzór (III.2.1) mamy

$$x'_i = x_i + e_{ij} \cdot x_j . \quad (\text{III.2.6})$$

Wielkości  $e_{ij}$  określające w jednoznaczny sposób małe przemieszczenia punktu ciała wskutek deformacji tworzą tensor drugiego rzędu, który nosi nazwę **tensora deformacji**. W ogólnym przypadku ten tensor nie jest tensorem symetrycznym ( $e_{ij} \neq e_{ji}$ ). Jednak dowolny tensor drugiego rzędu zawsze można przedstawić w postaci sumy tensora symetrycznego i antysymetrycznego. Istotnie

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) + \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) \equiv r_{ij} + \omega_{ij} . \quad (\text{III.2.7})$$

Tensor

$$r_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} + e_{ji}) \quad (\text{III.2.8})$$

jest tensorem symetrycznym i nosi nazwę **tensora odkształcenia**.

Tensor

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(e_{ij} - e_{ji}) \quad (\text{III.2.9})$$

jest tensorem antysymetrycznym i w przypadku deformacji jednorodnej opisuje czysty obrót (bez odkształcenia) ciała jako ciała sztywnego [5,6]. Łatwo udowodnić to twierdzenie przypuszczając na chwile, że tensor deformacji zawiera tylko część antysymetryczną:  $e_{ij} = \omega_{ij}$

. Antysymetryczny tensor  $\omega_{ij}$  ma zerowe elementy przekątne. Korzystając ze wzoru (III.2.6) możemy zapisać

$$x'_1 - x_1 = \omega_{13}x_3 - \omega_{21}x_2 , \quad (\text{III.2.10a})$$

$$x'_2 - x_2 = \omega_{21}x_1 - \omega_{32}x_3 , \quad (\text{III.2.10b})$$

$$x'_3 - x_3 = \omega_{32}x_2 - \omega_{13}x_1 , \quad (\text{III.2.10c})$$

albo w postaci wektorowej

$$\vec{r}' - \vec{r} = [\vec{\omega} \times \vec{r}] . \quad (\text{III.2.11})$$

Z mechaniki ciała sztywnego wiemy, że wektor przemieszczenia  $[\vec{\omega} \times \vec{r}]$  opisuje obrót wektora  $\vec{r}$  dookoła osi określonej wektorem  $\vec{\omega}$ , czyli obrót ciała jako całości bez odkształcenia. Kąt obrotu ciała dookoła osi  $Ox_3$  określa składowa  $\omega_3 \equiv \omega_{21}$  wektora  $\vec{\omega}$  albo składowa  $\omega_{21}$  tensora antysymetrycznego  $\omega_{ij}$ . Składowa  $\omega_2 \equiv \omega_{13}$  określa obrót ciała o kąt  $\omega_{13}$  dookoła osi  $Ox_2$ , a składowa  $\omega_1 \equiv \omega_{32}$  - obrót o kąt  $\omega_{32}$  dookoła osi  $Ox_1$ . Tensor antysymetryczny  $\omega_{ij}$  opisuje zatem obrót ciała jako ciała sztywnego bez zmiany wzajemnych odległości między dowolnymi punktami ciała. Odkształcenia ciała wskutek deformacji określa wyłącznie symetryczny tensor odkształcenia  $r_{ij}$  (III.2.8), a więc jeżeli interesują nas tylko odkształcenia ciała związane z deformacją możemy pominąć tensor  $\omega_{ij}$  we wzorze (III.2.7) i zapisać (III.2.6) w postaci

$$x'_i = x_i + r_{ij} \cdot x_j . \quad (\text{III.2.12})$$

Żeby uzmysłowić sobie znaczenie geometryczne składowych tensora odkształcenia  $r_{ij}$  rozważmy odkształcenie dwóch narysowanych na nie zdeformowanym ciele odcinków równoległych do osi  $Ox_1$  i  $Ox_2$  (rys.III.2.2). Po deformacji ciała punkty  $A$  i  $B$  tych odcinków przejdą w punkty  $A'$  i  $B'$ , współrzędne których zgodnie z (III.2.12) są równe

$$x_1(A') = x_1(A) \cdot (1 + r_{11}), \quad x_2(A') = x_1(A) \cdot r_{21} , \quad (\text{III.2.13})$$

$$x_2(B') = x_2(B) \cdot (1 + r_{22}), \quad x_1(B') = x_2(B) \cdot r_{12} . \quad (\text{III.2.14})$$

Ze wzorów (III.2.13) i (III.2.14) wynika, że składowe diagonalne tensora deformacji  $r_{11}$  i  $r_{22}$  odpowiadają przypadającym na jednostkę długości rozciągnięciom równoległym do kierunków  $Ox_1$  i  $Ox_2$ . Natomiast składowe  $r_{12}$  ( $r_{21}$ ) są miarą odkształceń ścinających

$$\text{tg} \theta \approx \frac{r_{21}}{(1 + r_{11})} ,$$

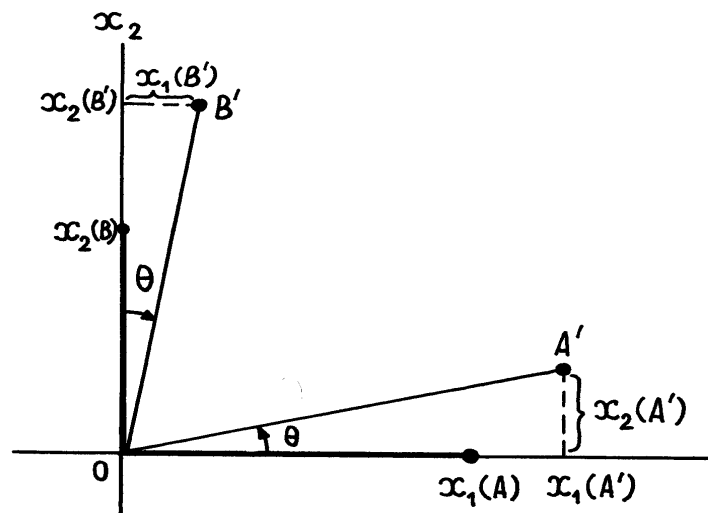
skąd dla małych odkształceń ( $r_{11} \ll 1$ ) mamy

$$\theta \approx r_{21} . \quad (\text{III.2.15})$$

W podobny sposób można wykazać, że składowa  $r_{33}$  określa wydłużenie ciała wzdłuż osi  $Ox_3$ , a składowa  $r_{12}$  i  $r_{23}$  są miarą wielkości odkształceń ścinających. Na przykład, jeżeli dwa

odcinki prostej narysujemy na nie zdeformowanym ciele równoległe do osi  $Ox_1$  i  $Ox_3$ , to po dokonaniu deformacji kąt między nimi będzie równy  $90^\circ - 2r_{12}$ .

Tensor deformacji  $r_{ij}$  jest tensorem symetrycznym, a zatem zawsze możemy znaleźć taki układ współrzędnych w którym tensor  $r_{ij}$  ma niezerowe tylko przekątne elementy. Oznacza to, że w tym układzie głównych osi tensora  $r_{ij}$  odkształcenie ciała możemy opisać jako wydłużenie wzdłuż trzech wzajemnie prostopadłych osi. Jeżeli z kryształu wytniemy sześcian ze ścianami prostopadłymi do osi głównych tensora  $r_{ij}$ , to po deformacji sześcian przejdzie w prostopadłościan.



Rys.III.2.2. Odkształcenie dwóch odcinków równoległych do osi  $Ox_1$  i  $Ox_2$

W ogólnym przypadku tensor  $r_{ij}$  jest tensorem pola i nie podlega więc ograniczeniom narzucanym zasadą Neumanna. Wyjątkiem są deformacje ciała spowodowane zmianą jego temperatury. Z doświadczeń wynika, że przy zmianie temperatury ciała o  $\Delta T$  jednorodne deformacje ciała określa wzór (patrz tablicę II.1)

$$r_{ij} = \alpha_{ij} \Delta T . \quad (\text{III.2.16})$$

Tu tensor deformacji  $r_{ij}$  po prostu pokrywa się z tensorem rozszerzalności cieplnej  $\alpha_{ij}$ , który jest tensorem materii i powinien spełniać zasadę Neumanna.



*Przykład III.2.1.* Względny przyrost objętości związany z deformacją ciała nazywamy rozszerzalnością. Wykażemy, że rozszerzalność określa wzór

$$\delta = \frac{V' - V}{V} = r_{11} + r_{22} + r_{33} . \quad (\text{III.2.17})$$

Tu  $V$  - objętość ciała do deformacji, a  $V'$  - objętość ciała po deformacji.

Rozpatrzmy jednostkowy sześcian i niech krawędzie sześcianu są równoległe do jednostkowych wektorów  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  układu współrzędnych  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ . Podczas odkształcenia jednorodnego krawędzie sześcianu zmieniają kierunek i długości. Wyrazimy teraz nowe krawędzie sześcianu  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$  za pomocą poprzednich  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Wektor  $\vec{e}_1$  (1,00) po deformacji ciała przechodzi w wektor  $\vec{e}'_1$ , współrzędne którego zgodnie z (III.2.12) są równe

$$(1 + r_{11}, r_{21}, r_{31}) ,$$

czyli w postaci wektorowej

$$\vec{e}'_1 = (1 + r_{11})\vec{e}_1 + r_{21}\vec{e}_2 + r_{31}\vec{e}_3 . \quad (\text{III.2.18a})$$

W podobny sposób znajdziemy

$$\vec{e}'_2 = r_{12}\vec{e}_1 + (1 + r_{22})\vec{e}_2 + r_{32}\vec{e}_3 . \quad (\text{III.2.18b})$$

$$\vec{e}'_3 = r_{13}\vec{e}_1 + r_{23}\vec{e}_2 + (1 + r_{33})\vec{e}_3 . \quad (\text{III.2.18c})$$

Zgodnie ze znanym wzorem na objętość równoległościanu o krawędziach  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$V = \vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] ,$$

objętość jednostkowego sześcianu po odkształceniu przyjmuje wartość

$$V' = \vec{e}'_1 \cdot [\vec{e}'_2 \times \vec{e}'_3] . \quad (\text{III.2.19})$$

Podstawiając wzory (III.2.18) do wzoru (III.2.19) i pomijając iloczyny dwóch składowych tensora  $r_{ij}$  otrzymujemy

$$V' \approx 1 + r_{11} + r_{22} + r_{33} .$$

Zatem rozszerzalność  $\delta$  dana jest przez wyrażenie (III.2.17).

Przykład III.2.2. Podczas odkształcenia ciał w postaci jednostkowego sześcianu ( $1 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$ ) przemieszczenie dowolnego punktu o współrzędnych  $x_1, x_2, x_3$  wynosi

$$u_1 = (4x_1 + 3x_2 - 5x_3) \cdot 10^{-4} \text{ cm} ,$$

$$u_2 = (7x_1 - 13x_2 + 4x_3) \cdot 10^{-4} \text{ cm} ,$$

$$u_3 = (9x_1 - 2x_2 + 4x_3) \cdot 10^{-4} \text{ cm} .$$

Wyznamy zmiany kątów między krawędziami sześcianu i względny przyrost objętości (rozszerzalność) ciała po deformacji.

Zgodnie ze wzorami (III.2.6), (III.2.8) i (III.2.9) tensory  $e_{ij}, r_{ij}$  i  $\omega_{ij}$  mają postaci

$$[e_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 7 & -13 & 4 \\ 9 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} ,$$

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & -13 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} ,$$

$$[\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} .$$

Zmiany kątów między krawędziami jednostkowego sześcianu określają nediagonalne składowe tensora deformacji  $r_{ij}$ . Kąt między krawędziami równoległymi do osi  $Ox_1$  i  $Ox_2$  będzie równy  $(90^\circ - 2r_{12})$ . Czyli zmiana kąta jest równa  $2r_{12} = 10^{-3} \text{ rad} = 3,42'$ . Kąt między krawędziami równoległymi do osi  $Ox_1$  i  $Ox_3$  będzie równy  $(90^\circ - 2r_{13})$ , a zmiana kąta jest równa  $2r_{13} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 1,2'$ . Zmiana kąta między krawędziami równoległymi do osi  $Ox_2$  i  $Ox_3$  wynosi  $2r_{23} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0,68'$ . Rozszerzalność, zgodnie z (III.2.17) jest równa

$$\delta = (r_{11} + r_{22} + r_{33}) = -5 \cdot 10^{-4} .$$

Przykład III.2.3. Trzy wektory  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  określające położenia trzech punktów  $A, B, C$  w ciele stałym są równoległe do wzajemnie prostopadłych jednostkowych wektorów  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

W wyniku deformacji ciała punkty  $A, B, C$  przemieści się do nowych położzeń, określonych przez wektory  $\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \vec{b}'_3$ . Wykażemy, że składowe tensora odkształcenia  $r_{ij}$  można wyrazić wzorem

$$2r_{ij} = \frac{(\vec{b}'_i \cdot \vec{b}'_j) - (\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j)}{|\vec{b}_i| \cdot |\vec{b}_j|} . \quad (\text{III.2.20})$$

Rozpatrzmy wektor  $\vec{b}_1$ , który łączy punkty  $(0,0,0)$  i  $(b_1 \equiv |\vec{b}_1|, 0, 0)$ . Współrzędne tych punktów, zgodnie z (III.2.12), są po deformacji równe:  $(0,0,0)$  i  $(b_1 + r_{11}b_1, r_{21}b_1, r_{31}b_1)$ . Wektor  $\vec{b}'_1$  więc ma postać

$$\vec{b}'_1 = b_1[(1 + r_{11}) \cdot \vec{e}_1 + r_{21}\vec{e}_2 + r_{31}\vec{e}_3] . \quad (\text{III.2.21a})$$

W podobny sposób otrzymujemy

$$\vec{b}'_2 = b_2[r_{12}\vec{e}_1 + (1 + r_{22}) \cdot \vec{e}_2 + r_{32}\vec{e}_3] . \quad (\text{III.2.21b})$$

$$\vec{b}'_3 = b_3[r_{13}\vec{e}_1 + r_{23}\vec{e}_2 + (1 + r_{33}) \cdot \vec{e}_3] . \quad (\text{III.2.21c})$$

Skąd z dokładnością do wyrazów liniowych względem składowych tensora  $r_{ij}$  mamy

$$(\vec{b}'_i \cdot \vec{b}'_i) = b_i^2(1 + 2r_{ii}) \equiv (\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i) + |\vec{b}_i|^2 \cdot 2r_{ii} , \quad (\text{III.2.22})$$

$$(\vec{b}'_i \cdot \vec{b}'_j) = b_i b_j (r_{ij} + r_{ji}) \equiv |\vec{b}_i| \cdot |\vec{b}_j| \cdot 2r_{ij} , \quad (i \neq j) . \quad (\text{III.2.23})$$

Ponieważ  $(\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j) = 0$ , jeżeli  $i \neq j$ , wzór (III.2.23) możemy zapisać również jako

$$(\vec{b}'_i \cdot \vec{b}'_j) = (\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j) + |\vec{b}_i| \cdot |\vec{b}_j| \cdot 2r_{ij} , \quad (i \neq j) . \quad (\text{III.2.24})$$

Łatwo widzieć, że teraz wzór (III.2.24) obejmuje również i wzór (III.2.22), a zatem

$$2r_{ij} = \frac{(\vec{b}'_i \cdot \vec{b}'_j) - (\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j)}{|\vec{b}_i| \cdot |\vec{b}_j|} .$$

*Przykład III.2.4.* Sieć przestrzenna chlorku cezu  $CsCl$  jest prostą siecią regularną (rys.III.2.3). Prosta baza zawiera dwa atomy: atom cezu w położeniu  $(0,0,0)$  i atom chloru w położeniu  $(1/2, 1/2, 1/2)$ . Po deformacji chlorku cezu tensor odkształcenia ma postać diagonalną:

$r_{11} \neq r_{22} \neq r_{33}$  ( $r_{ij} = 0$  przy  $i \neq j$ ). Obliczymy: (a) odległości między atomem chloru i najbliższymi atomami cezu w komórce elementarnej i (b) kąty między wiązaniami  $Cs_1 - Cl$  i  $Cs_2 - Cl$  oraz między wiązaniami  $Cs_1 - Cl$  i  $Cs_3 - Cl$  (rys.III.2.3) po deformacji  $CsCl$ .

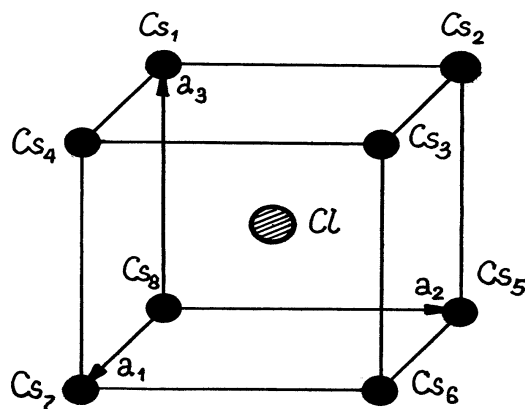
Niech  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  są wektory translacji sieci krystalicznej  $CsCl$  do deformacji kryształu ( $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = a$ ). Wtedy wektory  $\vec{R}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) łączące atom chloru z atomami cezu możemy zapisać jako (patrz rys.III.2.3)

$$\vec{R}_1 = -\vec{R}_6 = -\frac{1}{2}\vec{a}_1 - \frac{1}{2}\vec{a}_2 + \frac{1}{2}\vec{a}_3, \quad (\text{III.2.25a})$$

$$\vec{R}_2 = -\vec{R}_7 = -\frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2 + \frac{1}{2}\vec{a}_3, \quad (\text{III.2.25b})$$

$$\vec{R}_3 = -\vec{R}_8 = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2 + \frac{1}{2}\vec{a}_3, \quad (\text{III.2.25c})$$

$$\vec{R}_4 = -\vec{R}_5 = \frac{1}{2}\vec{a}_1 - \frac{1}{2}\vec{a}_2 + \frac{1}{2}\vec{a}_3. \quad (\text{III.2.25d})$$



Rys.III.2.3. Komórka elementarna  $CsCl$

Łatwo obliczyć, że przed deformacją długości wektorów  $\vec{R}_i$  są równe

$$|\vec{R}_i| = \frac{\sqrt{3}}{2}a. \quad (\text{III.2.26})$$

Po deformacji kryształu wektory translacji  $\vec{a}_i$  zmieniają swoje kierunki i długości i przechodzą w wektory  $\vec{a}'_i$ . Zgodnie ze wzorem (III.2.20) dla iloczynu skalarnego ( $\vec{a}'_i \cdot \vec{a}'_j$ ) możemy zapisać

$$(\vec{a}'_i \cdot \vec{a}'_j) = (2r_{ij} + \delta_{ij}) \cdot a^2, \quad (\text{III.2.27})$$

gdzie  $\delta_{ij}$  jest symbolem Kroneckera.

Niediagonalne elementy tensora odkształceń  $r_{ij}$  są równe zero, a zatem ze wzoru (III.2.27) otrzymujemy, że po deformacji kryształu wektory translacji  $\vec{a}'_i$  znów tworzą trójkę wzajemnie prostopadłych wektorów. Więc po deformacji komórka elementarna chlorku cezu przekształca się w prostopadłościan, długości krawędzie którego, zgodnie z (III.2.27), wynoszą

$$|\vec{a}'_1|^2 = (1 + 2r_{11}) \cdot a^2, \quad (\text{III.2.28a})$$

$$|\vec{a}'_2|^2 = (1 + 2r_{22}) \cdot a^2, \quad (\text{III.2.28b})$$

$$|\vec{a}'_3|^2 = (1 + 2r_{33}) \cdot a^2. \quad (\text{III.2.28c})$$

Zgodnie ze wzorami (III.2.25) po deformacji kryształu wektory  $\vec{R}_i$ , łączące atom chloru z atomami cezu przechodzą w wektory  $\vec{R}'_i$  i

$$\vec{R}'_1 = -\vec{R}'_6 = -\frac{1}{2}\vec{a}'_1 - \frac{1}{2}\vec{a}'_2 + \frac{1}{2}\vec{a}'_3, \quad (\text{III.2.29a})$$

$$\vec{R}'_2 = -\vec{R}'_7 = -\frac{1}{2}\vec{a}'_1 + \frac{1}{2}\vec{a}'_2 + \frac{1}{2}\vec{a}'_3, \quad (\text{III.2.29b})$$

$$\vec{R}'_3 = -\vec{R}'_8 = \frac{1}{2}\vec{a}'_1 + \frac{1}{2}\vec{a}'_2 + \frac{1}{2}\vec{a}'_3, \quad (\text{III.2.29c})$$

$$\vec{R}'_4 = -\vec{R}'_5 = \frac{1}{2}\vec{a}'_1 - \frac{1}{2}\vec{a}'_2 + \frac{1}{2}\vec{a}'_3. \quad (\text{III.2.29d})$$

Biorąc pod uwagę wzory (III.2.29), łatwo wykazać, że po deformacji kryształu odległości między atomami chloru i atomami cezu pozostają sobie równe i wynoszą

$$\begin{aligned}
|\vec{R}_i| &= \frac{1}{2} \sqrt{(\vec{a}'_1 \cdot \vec{a}'_1)^2 + (\vec{a}'_2 \cdot \vec{a}'_2)^2 + (\vec{a}'_3 \cdot \vec{a}'_3)} \\
&= |\vec{R}_i| \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{3}(r_{11} + r_{22} + r_{33})}
\end{aligned} \quad (III.2.30)$$

Tu  $|\vec{R}_i|$  jest określone wzorem (III.2.26).

Obliczymy teraz kąty między wektorami  $\vec{R}'_1$  i  $\vec{R}'_2$  (kątem  $\theta'_{12}$ ) oraz wektorami  $\vec{R}'_2$  i  $\vec{R}'_3$  (kątem  $\theta'_{23}$ ). Uwzględniając wzory (III.2.29) mamy

$$(\vec{R}'_1 \cdot \vec{R}'_2) = |\vec{R}'_1| |\vec{R}'_2| \cos \theta'_{12} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 [1 + 2(r_{11} - r_{22} + r_{33})], \quad (III.2.31)$$

$$(\vec{R}'_2 \cdot \vec{R}'_3) = |\vec{R}'_2| |\vec{R}'_3| \cos \theta'_{23} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 [1 + 2(-r_{11} + r_{22} + r_{33})], \quad (III.2.32)$$

Skąd wynika, że

$$\cos \theta'_{12} = \frac{1 + 2(r_{11} - r_{22} + r_{33})}{3 + 2(r_{11} + r_{22} + r_{33})}, \quad (III.2.33)$$

$$\cos \theta'_{23} = \frac{1 + 2(-r_{11} + r_{22} + r_{33})}{3 + 2(r_{11} + r_{22} + r_{33})}. \quad (III.2.34)$$

Przed deformacją kryształu kąty między wektorami  $\vec{R}_1$  i  $\vec{R}_2$  (kątem  $\theta_{12}$ ) oraz wektorami  $\vec{R}_2$  i  $\vec{R}_3$  (kątem  $\theta_{23}$ ) są sobie równe i wynoszą

$$\cos \theta_{12} = \cos \theta_{23} = \frac{1}{3}. \quad (III.2.35)$$

Z porównania wzorów (III.2.33), (III.2.34) i (III.2.35) widzimy, że po deformacji kryształu kąty między wiązaniami  $Cs_1 - Cl$  i  $Cs_2 - Cl$  oraz między  $Cs_2 - Cl$  i  $Cs_3 - Cl$  nie są już sobie równe.

### Zadania do § III.2

1. Odształcenie ciała, które miało przed deformacją postać kuli o promieniu 1 cm określa tensor odształcenia

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} .$$

Wykazać, że po deformacji ciało przyjmuje postać elipsoidy półosie której są równe: 1,001 cm; 0,996 cm; 0,992 cm.

2. Tensor deformacji  $e_{ij}$  ciała w pewnym układzie ma postać

$$[e_{ij}] = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ 1 & 12 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} .$$

Obliczyć tensor odkształcenia  $[r_{ij}]$ , tensor obrotów ciała  $[\omega_{ij}]$ , główny układ współrzędnych i główne wartości (główne deformacje) tensora  $[r_{ij}]$ .

*Odpowiedź:* główny układ współrzędnych tensora  $[r_{ij}]$  otrzymujemy przez obrót układu krystalofizycznego o kąt  $26^{\circ}34'$  dookoła osi  $Ox_2$  w kierunku od osi  $Ox_3$  do osi  $Ox_1$ ; główne deformacje są równe:  $r_1 = 10^{-5}$ ,  $r_2 = 1,2 \cdot 10^{-5}$ ,  $r_3 = 0$ .

3. Deformację ciała opisuje tensor odkształcenia

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} .$$

Znaleźć trzy wzajemnie prostopadłe kierunki w ciełe, które i po deformacji ciała pozostają wzajemnie prostopadłe.

*Odpowiedź:*  $\vec{n}_1(0,8945; 0; -0,447)$ ;  $\vec{n}_2(0; 1; 0)$ ;  $\vec{n}_3(0,4470; 0; 0,8945)$ .

4. Sieć przestrzenna germanu ( $Ge$ ) jest siecią regularną powierzchniowo centrowaną. Prosta baza zawiera dwa atomy  $Ge$  w położeniach  $(0;0;0)$  i  $(1/4;1/4;1/4)$ . Komórka elementarna germanu ma więc osiem atomów  $Ge$  w położeniach:  $Ge_1 - (0;0;0)$ ;  $Ge_2 - (1/2;1/2;0)$ ;  $Ge_3 - (1/2;0;1/2)$ ;  $Ge_4 - (0;1/2;1/2)$ ;  $Ge_5 - (1/4;1/4;1/4)$ ;  $Ge_6 - (3/4;3/4;1/4)$ ;  $Ge_7 - (3/4;1/4;3/4)$ ;  $Ge_8 - (1/4;3/4;3/4)$ . Atom germanu z numerem 5 ma wokół siebie cztery atomy  $Ge$  z numerami  $1+4$ , umieszczone w narożach tetraedru. Po deformacji germanu tensor odkształcenia ma postać

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{11} & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}.$$

Obliczyć: (a) odległości między atomom  $Ge_5$  i otaczającymi go atomami do i po deformacji ciała; (b) kąty między wektorami łączącymi atom  $Ge_5$  z atomami  $Ge_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) przed i po deformacji ciała.

*Odpowiedź:* (a) do deformacji ciała odległości między atomom  $Ge_5$  i otaczającymi go atomami  $|\vec{R}_{5i}|$  ( $i=1,2,3,4$ ) są sobie równe i wynoszą  $\sqrt{3}a/4$  (tu  $a$  jest stała komórki elementarnej); po deformacji ciała odległości te pozostają sobie równe i  $|\vec{R}'_{5i}| = |\vec{R}_{5i}| \cdot \sqrt{1 + 2(2r_{11} + r_{33})/3}$ . (b) do deformacji kąty  $\theta_{ij}$  między wektorami  $\vec{R}_{5i}$  i  $\vec{R}_{5j}$  ( $i \neq j; i, j = 1,2,3,4$ ) są sobie równe i  $\cos \theta_{ij} = -1/3$ ; po deformacji ciała:  $\cos \theta'_{12} = \cos \theta'_{34} = -(1 + 4r_{11} - 2r_{33})/(3 + 4r_{11} + 2r_{33})$ ;  $\cos \theta'_{13} = \cos \theta'_{14} = \cos \theta'_{23} = \cos \theta'_{24} = -(1 + 2r_{33})/(3 + 4r_{11} + 2r_{33})$ .

### III.3 Prawo Hooke'a

Pod działaniem naprężeń ciało stałe zmienia swój kształt. Z doświadczeń wynika, że jeżeli wielkość naprężenia jest mniejsza od pewnej wartości, zwanej **granica sprężystości**, to odkształcenie jest odwracalne i po usunięciu naprężenia ciało powraca do swego pierwotnego kształtu. Zaobserwowano dalej, że dla małych naprężeń wielkości odkształcenia są wprost proporcjonalne do wielkości przyłożonego naprężenia. Jeżeli mamy na przykład pręt rozciągany przez obciążenie tak, że naprężenie rozciągające wynosi  $t$ , to odkształcenie podłużne  $r = \Delta l / l$ , gdzie  $\Delta l$  oznacza przyrost długości pręta, a  $l$  - długość pierwotną, wynosi

$$r = s \cdot t, \quad (\text{III.3.1})$$

gdzie  $s$  jest stałą i tą stałą nazywamy **współczynnikiem sprężystości** lub krótko **sprężystością**.

Doświadczalne udowodnione prawo (III.3.1) nosi nazwę **prawa Hooke'a**. Podkreślimy, że prawo Hooke'a jest słuszne tylko w przypadku małych naprężeń.

Wzór (III.3.1) możemy zapisać w inny sposób

$$t = \frac{1}{s} r \equiv c \cdot r, \quad (\text{III.3.2})$$



gdzie  $c = 1/s$  nazywamy **współczynnikiem sztywności** lub **sztywnością**. Z podstaw fizyki stałą  $c$  jest znana pod nazwą modułu Younga lub modułu sprężystości.

**Uogólnione prawo Hooke'a** stwierdza, że przyłożone do kryształu jednorodne naprężenie  $t_{ij}$ , wywołuje jednorodne odkształcenie  $r_{kl}$  takie, że każda składowa tensora odkształceń  $r_{kl}$  związana jest ze wszystkimi składowymi tensora naprężeń  $t_{ij}$ , czyli

$$r_{ij} = \sum_{k,l} s_{ijkl} \cdot t_{kl} \equiv s_{ijkl} \cdot t_{kl} . \quad (\text{III.3.3})$$

Współczynniki  $s_{ijkl}$  nazywamy **współczynnikami sprężystości kryształu**.

Związki (III.3.3) możemy rozważać jako układ równań na składowe tensora  $t_{ij}$ . Rozwiązania tego układu równań możemy zapisać w postaci

$$t_{ij} = \sum_{k,l} c_{ijkl} \cdot r_{kl} \equiv c_{ijkl} \cdot r_{kl} . \quad (\text{III.3.4})$$

Współczynniki  $c_{ijkl}$  są liniowymi funkcjami współczynników  $s_{ijkl}$  i noszą nazwę **współczynników sztywności**.

Tensor naprężeń jest tensorem drugiego rzędu dla którego (patrz rozdział III.1)

$$t_{ij} = t_{ji} , \quad (\text{III.3.5})$$

a więc prawo Hooke'a (III.3.3) możemy zapisać w postaci

$$r_{ij} = \frac{1}{2} (s_{ijkl} + s_{ijlk}) \cdot t_{kl} . \quad (\text{III.3.6})$$

Ze wzoru (III.3.6) wynika, że składowe  $s_{ijkl}$  oraz  $s_{ijlk}$  ( $l \neq k$ ) zawsze występują razem, a zatem w zasadzie nie będziemy mogli przeprowadzić takiego eksperymentu, który dałby możliwość zmierzyć oddzielne składowe  $s_{ijkl}$  i  $s_{ijlk}$  ( $l \neq k$ ). Tak więc, możemy przyjąć, że obie te składowe są sobie równe, czyli

$$s_{ijkl} = s_{ijlk} . \quad (\text{III.3.7})$$

Dla składowe tensora odkształceń  $r_{ij}$  mamy również (patrz rozdział III.2)

$$r_{ij} = r_{ji} . \quad (\text{III.3.8})$$

Korzystając ze wzoru (III.3.8) i prawa Hooke'a (III.3.3) możemy zapisać

$$r_{ij} - r_{ji} = (s_{ijkl} - s_{jikl}) \cdot t_{kl} = 0,$$

skąd również wynika, że

$$s_{ijkl} = s_{jikl}. \quad (\text{III.3.9})$$

Tensor czwartego rzędu  $s_{ijkl}$  ma 81 składowych. Jednak ze względu na związki (III.3.7) i (III.3.9) pozostanie tylko 36 niezależnych składowych tensora  $s_{ijkl}$  zamiast 81. Łatwo udowodnić, że tensor  $c_{ijkl}$  ma również tylko 36 niezależnych składowych.

Symetria dwóch pierwszych i dwóch ostatnich wskaźników przy  $s_{ijkl}$  i  $c_{ijkl}$  stwarza możliwość zastosowania zapisu macierzowego składowych tych tensorów. W tym celu, w składowych  $s_{ijkl}$  i  $c_{ijkl}$  pierwsze dwa wskaźniki ( $ij$ ) zastępujemy jednym przyjmującym wartości od 1 do 6 i tak samo postępujemy z dwoma ostatnimi wskaźnikami. Stosujemy przy tym następujący schemat:

Zapis wskaźników ( $ij$ ) oraz ( $kl$ ) tensorowy	11	22	33	23,32	31,13	12,21	(III.3.10)
Zapis macierzowy ( $m$ ) oraz ( $n$ ) dla wskaźników ( $ij$ ) oraz ( $kl$ )	1	2	3	4	5	6	

jednocześnie wprowadzamy czynnik 2 albo 4 w sposób następujący:

$$\begin{aligned} s_{ijkl} &= s_{mn}, & \text{gdy } m \text{ i } n \text{ mają wartości } 1,2 \text{ lub } 3, \\ 2s_{ijkl} &= s_{mn} & \text{gdy albo } m, \text{ albo } n \text{ są równe } 4,5 \text{ lub } 6, \\ 4s_{ijkl} &= s_{mn}, & \text{gdy zarówno } m, \text{ jak i } n \text{ są równe } 4,5 \text{ lub } 6, \end{aligned}$$

Korzystając z reguły (III.3.10) dla zapisu składowych tensorów  $t_{kl}$  oraz  $r_{kl}$ , wzory (III.3.3) i (III.3.4) możemy zapisać następująco:

$$r_m = s_{mn} \cdot t_n, \quad (\text{III.3.11})$$

$$t_m = c_{mn} \cdot r_n, \quad (\text{III.3.12})$$

Przy pomocy zapisu macierzowego łatwo możemy wypisać współczynniki sprężystości  $s_{mn}$  i sztywności  $c_{mn}$  w postaci tabelki ( $6 \times 6$ ). Warto pamiętać, że współczynniki  $s_{mn}$  i  $c_{mn}$ , charakteryzujące się dwoma wskaźnikami nie transformują się tak jak składowe tensora drugiego rzędu.

Dla charakterystyki właściwości sprężystych kryształów często stosuje się wielkości: **moduł Younga** ( $E$ ) oraz **współczynnik Poissona** ( $\sigma_{zx}$ ). Moduł Younga charakteryzuje właściwości sprężyste ciała wzdłuż kierunku działania naprężenia. Rozważmy kryształ wycięty w kształcie cienkiego pręta (nici) i obciążony wzdłuż osi pręta. Moduł Younga definiujemy jako stosunek naprężenia działającego wzdłuż osi pręta do odkształcenia pręta wzdłuż tej samej osi. Wybierzmy oś  $Oz'$  wzdłuż osi pręta. Wtedy zgodnie z (III.3.11) moduł Younga określa wzór

$$E = \frac{r_3}{t_3} = \frac{1}{s'_{3333}} \equiv \frac{1}{\alpha_{3i}\alpha_{3j}\alpha_{3k}\alpha_{3l} \cdot s_{ijkl}}, \quad (\text{III.3.13})$$

gdzie  $\alpha_{3i}, \alpha_{3j}, \alpha_{3k}, \alpha_{3l}$  - cosinusy kierunkowe osi  $Oz'$  w danym układzie kryształofizycznym;  $s_{ijkl}$  składowe tensora sprężystości w tym układzie.

Rozważmy teraz kryształ wycięty w kształcie prostopadłościanu i ściśnięty wzdłuż jednej ze ścian (wybierzemy kierunek działania naprężenia, czyli kierunek prostopadły do tej ściany za oś  $Ox$ ). Współczynnik Poissona  $\sigma_{zx}$  definiujemy jako stosunek odkształcenia wzdłuż osi  $Oz$  prostopadłej do osi  $Ox$  do odkształcenia wzdłuż osi  $Ox$ . Zgodnie ze wzorem (III.3.11)

$$\sigma_{zx} = \frac{r_3}{r_1} = \frac{s_{31}}{s_{11}}. \quad (\text{III.3.14})$$

**Ściśliwością objętościową kryształu** nazywamy względne zmniejszenie objętości kryształu podczas działania jednostkowego ciśnienia hydrostatycznego. Tensor naprężenia odpowiadający ciśnieniu hydrostatycznemu ma postać

$$t_{kl} = -p\delta_{kl}.$$

Więc odkształcenia spowodowane ciśnieniem hydrostatycznym wynoszą

$$r_{ij} = -ps_{ijkl} \cdot \delta_{kl} = -ps_{ijkk}. \quad (\text{III.3.15})$$

Zgodnie z (III.2.17) rozszerzalność  $\delta = \Delta V / V$  określa wzór

$$\frac{\Delta V}{V} = r_{ii} = -p s_{iikk} .$$

Stąd dla ściśliwości objętościowej otrzymujemy

$$\frac{\Delta V}{V} (p = 1) = -s_{iikk} . \quad (\text{III.3.16})$$

**Ściśliwością liniową** nazywamy względne zmniejszenie długości kryształu w kształcie cienkiego pręta, gdy kryształ poddajemy jednostkowemu ciśnieniu hydrostatycznemu. Pod działaniem ciśnienia hydrostatycznego  $P$  zmniejszenie długości pręta w kierunku jednostkowego wektora  $\vec{n}$  wynosi

$$r_{ij} \cdot n_i n_j = -p \cdot s_{ijkk} \cdot n_i n_j . \quad (\text{III.3.17})$$

Tu uwzględniliśmy wzór (III.3.15).

Dla jednostkowego ciśnienia  $P$  ze wzoru (II.3.17) mamy następujący wzór na ściśliwość liniową  $\beta$

$$\beta = s_{ijkk} \cdot n_i n_j . \quad (\text{III.3.18})$$

Można wykazać [5,22], że praca potrzebna do wywołania odkształcenia  $r_{ij}$  jednostki objętości kryształu, którą nazywamy **energiją odkształcenia**, wynosi

$$W_{sp} = \frac{1}{2} c_{ij} r_i r_j, \quad (i = 1, 2, \dots, 6) . \quad (\text{III.3.19})$$

*Przykład III.3.1.* Wykażemy, że macierz współczynników sprężystości kryształów układu regularnego ma postać

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix} . \quad (\text{III.3.20})$$

We wszystkich klasach układu regularnego występują cztery trzykrotne osi obrotowe, które mają kierunek typu [111]. Przy obrocie o kąt  $2\pi / 3$  wokół każdej z osi 3-krotnej następuje kolejna zamiana kierunków osi  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ :

oś 3 wzdłuż kierunku [111]

$$x_1 \rightarrow x_2, \quad x_2 \rightarrow x_3, \quad x_3 \rightarrow x_1, \quad (\text{III.3.21a})$$

oś 3 wzdłuż kierunku  $[\bar{1}\bar{1}1]$

$$x_1 \rightarrow x_2, \quad x_2 \rightarrow -x_3, \quad x_3 \rightarrow -x_1, \quad (\text{III.3.21b})$$

oś 3 wzdłuż kierunku [111]

$$x_1 \rightarrow x_3, \quad x_3 \rightarrow -x_2, \quad x_2 \rightarrow -x_1, \quad (\text{III.3.21c})$$

oś 3 wzdłuż kierunku [111]

$$x_1 \rightarrow -x_2, \quad x_2 \rightarrow -x_3, \quad x_3 \rightarrow -x_1, \quad (\text{III.3.21d})$$

Korzystając ze wzoru (III.3.21a) otrzymujemy, że składowe  $s_{ij}$  przekształcają się przy obrocie układu o kąt  $2\pi/3$  w następujący sposób

$$\begin{array}{cccccc} s_{11} \rightarrow s_{22} & s_{12} \rightarrow s_{23} & s_{13} \rightarrow s_{21} & s_{14} \rightarrow s_{25} & s_{15} \rightarrow s_{26} & s_{16} \rightarrow s_{24} \\ & s_{22} \rightarrow s_{33} & s_{23} \rightarrow s_{31} & s_{24} \rightarrow s_{35} & s_{25} \rightarrow s_{36} & s_{26} \rightarrow s_{34} \\ & & s_{33} \rightarrow s_{11} & s_{34} \rightarrow s_{15} & s_{35} \rightarrow s_{16} & s_{36} \rightarrow s_{14} \\ & & & s_{44} \rightarrow s_{55} & s_{45} \rightarrow s_{56} & s_{46} \rightarrow s_{54} \\ & & & & s_{55} \rightarrow s_{66} & s_{56} \rightarrow s_{46} \\ & & & & & s_{66} \rightarrow s_{44} \end{array} \quad (\text{III.3.22})$$

Z przekształceń (III.3.22) wynika, że macierz współczynników sprężystości  $s_{ij}$  musi mieć postać

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{11} & s_{12} & s_{16} & s_{14} & s_{15} \\ & & s_{11} & s_{15} & s_{16} & s_{14} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{45} \\ & & & & s_{44} & s_{45} \\ & & & & & s_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.23})$$

Korzystając ze wzoru (III.3.21b) otrzymujemy, że składowe  $s_{ij}$  przekształcają się przy obrocie układu o kąt  $2\pi/3$  dookoła drugiej 3-krotnej osi w następujący sposób

$$\begin{array}{cccccc}
s_{11} \rightarrow s_{33} & s_{12} \rightarrow s_{13} & s_{13} \rightarrow s_{23} & s_{14} \rightarrow -s_{36} & s_{15} \rightarrow s_{34} & s_{16} \rightarrow -s_{35} \\
& s_{22} \rightarrow s_{11} & s_{23} \rightarrow s_{12} & s_{24} \rightarrow -s_{16} & s_{25} \rightarrow s_{14} & s_{26} \rightarrow -s_{15} \\
& & s_{33} \rightarrow s_{22} & s_{34} \rightarrow -s_{26} & s_{35} \rightarrow s_{24} & s_{36} \rightarrow -s_{25} \\
& & & s_{44} \rightarrow s_{66} & s_{45} \rightarrow -s_{46} & s_{46} \rightarrow s_{56} \\
& & & & s_{55} \rightarrow s_{44} & s_{56} \rightarrow -s_{45} \\
& & & & & s_{66} \rightarrow s_{55}
\end{array} \quad (III.3.24)$$

Ze wzoru (III.3.24) wynika, że powinno być, na przykład,  $s_{14} = -s_{36}$ . Jednak, ze wzoru (III.3.23) mamy  $s_{36} = s_{14}$ , a więc  $s_{14} = 0$ . W podobny sposób otrzymujemy

$$s_{14} = s_{15} = s_{16} = s_{45} = 0. \quad (III.3.25)$$

Biorąc pod uwagę związki (III.3.25) ze wzoru (III.3.23) otrzymujemy wzór (III.3.20).

*Przykład III.3.2.* Znajdziemy kierunki w kryształach układu regularnego w których moduł Younga ma wartości minimalne i maksymalne.

Zgodnie ze wzorem (III.3.13)

$$E^{-1} = \alpha_{3i} \alpha_{3j} \alpha_{3k} \alpha_{3l} \cdot s_{ijkl} = n_i n_j n_k n_l \cdot s_{ijkl}, \quad (III.3.26)$$

gdzie  $n_i$  - cosinusy kierunkowe wektora jednostkowego  $\vec{n}$  w danym układzie krystalofizycznym.

Dla kryształów układu regularnego tensor współczynników sprężystości określa wzór (III.3.20). Po podstawieniu do wzoru (III.3.26) niezerowych składowych tensora  $s_{ijkl}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}
E^{-1} &= s_{11}(n_1^4 + n_2^4 + n_3^4) + (s_{44} + 2s_{12}) \cdot (n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2) \\
&= s_{11} - 2(s_{11} - s_{12} - 1/2 \cdot s_{44}) \cdot (n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2)
\end{aligned} \quad (III.3.27)$$

Ze wzoru (III.3.27) wynika, że zależność  $E^{-1}$  od  $\vec{n}$  (od kierunku w kryształach) określa funkcja

$$f = n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2. \quad (III.3.28)$$

Znajdziemy teraz maksimum funkcji (III.3.28), korzystając z metody nieoznaczonych mnożników Lagrange'a [8]. Zapiszmy funkcję  $f$  w postaci

$$f = n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2 \equiv n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2 + \lambda (1 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2), \quad (III.3.29)$$

gdzie  $\lambda$  - mnożnik Lagrange'a.

Różniczkując (III.3.29) względem  $n_1^2$ ,  $n_2^2$  oraz  $n_3^2$  i korzystając z warunku określającego ekstremum funkcji otrzymujemy

$$\frac{\partial f}{\partial n_1^2} = n_2^2 + n_3^2 - \lambda = 0, \quad (\text{III.3.30a})$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_2^2} = n_1^2 + n_3^2 - \lambda = 0, \quad (\text{III.3.30b})$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_3^2} = n_1^2 + n_2^2 - \lambda = 0. \quad (\text{III.3.30c})$$

Z układu równań (III.3.30), biorąc pod uwagę, że  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ , mamy

$$n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{3},$$

skąd

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (\text{III.3.31})$$

A zatem, w kryształach układu regularnego istnieją osiem kierunków typu [111] wzdłuż których wielkość  $n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2$  ma maksymalną wartość. Uwzględniając, że dla kryształów układu regularnego  $(s_{11} - s_{12} - s_{44}/2) > 0$  [5], otrzymujemy ze wzoru (III.3.27), że moduł Younga  $E$  ma maksymalne wartości w kierunkach typu [111]. Minimalne wartości moduł Younga ma w kierunkach, gdy  $n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2 = 0$ , czyli w kierunkach typu [100].

*Przykład III.3.3.* Wykażemy, że przekrój powierzchni charakterystycznej modułu Younga płaszczyzną prostopadłą do osi 3-krotnej kryształu regularnego jest okręgiem.

Równanie powierzchni charakterystycznej modułu Younga, zgodnie z (III.3.27) ma postać

$$E = \frac{1}{s_{11} - 2(s_{11} - s_{12} - s_{44}/2) \cdot (n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2)}. \quad (\text{III.3.32})$$

Równanie powierzchni prostopadłej do jednostkowego wektora  $\vec{l}$  możemy zapisać jako

$$(\vec{r} \cdot \vec{l}) = 0, \quad (\text{III.3.33})$$

gdzie  $\vec{r}$  jest wektorem leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do wektora  $\vec{l}$ .

W kryształach układu regularnego osi 3-krotne jest skierowane wzdłuż kierunków typu [111].

Wyberzemy wektor  $\vec{l}$  wzdłuż kierunku [111]:  $\vec{l} (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ . Podstawiając do wzoru (III.3.33) zamiast wektora  $\vec{r}$  wektor  $\vec{n}$  znajdujemy

$$(\vec{n} \cdot \vec{l}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(n_1 + n_2 + n_3) = 0 ,$$

skąd

$$n_3 = -n_1 - n_2 . \quad (\text{III.3.34})$$

Ze wzoru (III.3.34), oraz tożsamości  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$  otrzymujemy

$$n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2 = 1/2 . \quad (\text{III.3.35})$$

Biorąc pod uwagę te równości znajdujemy

$$n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_1^2 n_3^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2 - 1/4 = 1/4 . \quad (\text{III.3.36})$$

Po podstawieniu (III.3.36) do (III.3.32) mamy

$$E = \frac{4}{2(s_{11} + s_{12}) + s_{44}} , \quad (\text{III.3.37})$$

a więc w płaszczyźnie prostopadłej do osi 3-krotnej przekrój powierzchni charakterystycznej modułu Younga jest okręgiem.

*Przykład III.3.4.* Wykażemy, że rozszerzalność  $\delta = \Delta V / V$  kryształów układu regularnego nie zależy od kierunku działania naprężenia rozciągającego.

Wyberzemy oś  $Ox'_3$  wzdłuż kierunku działania naprężenia jednoosiowego. Wtedy tensor naprężenia w tym układzie współrzędnych będzie miał postać

$$[t'_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} . \quad (\text{III.3.38})$$

W układzie krystalofizycznym tensor naprężenia znajdziemy, korzystając z reguł przekształcenia składowych tensora drugiego rzędu i wzoru (III.3.38)

$$t_{ij} = \alpha_{3i} \alpha_{3j} t'_{33} = n_i n_j t , \quad (\text{III.3.39})$$

gdzie  $n_i$  - cosinusy kierunkowe wektora jednostkowego  $\vec{n}$  równoległego do osi  $Ox'_3$  w układzie krystalofizycznym.

Rozszerzalność kryształu, zgodnie z (III.2.17) wynosi  $\delta = r_{ii}$ . Korzystając z (III.3.11) i (III.3.39) dla składowej tensora odkształceń  $r_{11}$  mamy



$$r_{11} = s_{11kl} t_{kl} = t[s_{1111}n_1^2 + s_{1122}n_2^2 + s_{1133}n_3^2 + (s_{1112} + s_{1121})n_1n_2 + (s_{1113} + s_{1131})n_1n_3 + (s_{1123} + s_{1132})n_2n_3] \quad (\text{III.3.40})$$

Stosując zapis macierzowy zapiszmy wzór (III.3.40) w postaci

$$r_1 = t(s_{11}n_1^2 + s_{12}n_2^2 + s_{13}n_3^2 + s_{16}n_1n_2 + s_{15}n_1n_3 + s_{14}n_2n_3) \quad (\text{III.3.41})$$

Dla kryształów układu regularnego macierz współczynników sprężystości określa wzór (III.3.20). Biorąc pod uwagę (III.3.20) ze wzoru (III.3.41) otrzymujemy

$$r_1 = t(s_{11}n_1^2 + s_{12}n_2^2 + s_{12}n_3^2) \quad (\text{III.3.42a})$$

W podobny sposób znajdujemy

$$r_2 = t(s_{12}n_1^2 + s_{11}n_2^2 + s_{12}n_3^2) \quad (\text{III.3.42b})$$

$$r_3 = t(s_{12}n_1^2 + s_{12}n_2^2 + s_{11}n_3^2) \quad (\text{III.3.42c})$$

Po podstawieniu wzorów (III.3.42) do wzoru na rozszerzalność otrzymujemy

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} = r_1 + r_2 + r_3 = t(s_{11} + 2s_{12}) \cdot (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \equiv t(s_{11} + 2s_{12}) \quad (\text{III.3.43})$$

ponieważ  $(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = 1$ . A więc zmiana objętości kryształu regularnego pod wpływem naprężenia jednoosiowego nie zależy od kierunku działania tego naprężenia.

### Zadania do § III.3

1. Wykazać, że macierz współczynników sprężystości  $s_{ij}$  dla kryształów układu rombowego (klasy  $222, mm2, mmm$ ) ma postać

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.44})$$

2. Wykazać, że macierz współczynników sztywności  $c_{ij}$  dla kryształów układu trygonalnego (klasy  $32, 3m, \bar{3}m$ ) ma postać

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{66} \end{bmatrix} . \quad (\text{III.3.45})$$

3. Wykazać, że dla kryształów klasy  $4mm$  jest słuszny związek

$$c_{11} - c_{12} = \frac{1}{s_{11} - s_{12}} .$$

4. Udowodnić, że dla kryształów układu regularnego są słuszne związki

$$c_{11} = \frac{s_{11} + s_{12}}{(s_{11} - s_{12})(s_{11} + 2s_{12})}, \quad c_{12} = -\frac{-s_{12}}{(s_{11} - s_{12})(s_{11} + 2s_{12})}, \quad c_{44} = \frac{1}{s_{44}} .$$

5. Udowodnić, że równanie powierzchni charakterystycznej modułu Younga dla kryształów układu rombowego ma postać

$$E^{-1} = s_{11}n_1^4 + 2s_{12}n_1^2n_2^2 + 2s_{13}n_1^2n_3^2 + \\ s_{22}n_2^4 + 2s_{23}n_2^2n_3^2 + s_{33}n_3^4 + \\ s_{44}n_2^2n_3^2 + s_{55}n_1^2n_3^2 + s_{66}n_1^2n_2^2 .$$

6. Kryształ kwarcu ( $SiO_2$ , grupa punktowa 32) został poddany jednoosiowemu ściśnieniu wzdłuż a) osi 2-krotnej, b) osi 3 - krotnej. Obliczyć składowe tensora odkształcenia.

*Odpowiedź:* a)  $r_1 = s_{11}t_1$ ,  $r_2 = s_{12}t_1$ ,  $r_3 = s_{13}t_1$ ; b)  $r_1 = r_2 = s_{13}t_3$ ,  $r_3 = s_{33}t_3$ .

7. Wykazać, że ściśliwość liniową  $\beta$  kryształów układu regularnego określa wzór

$$\beta = s_{11} + 2s_{12} .$$

8. Wyprowadzić wzór (III.3.19).

### III.4 Fale sprężyste w kryształach

Fale sprężyste w kryształach będziemy rozważali, traktując kryształ jako ośrodek ciągły, a więc pomijając atomową budowę kryształu. Przybliżenie to jest dobrym przybliżeniem dla fal o długościach  $\lambda$  znacznie większych od stałej sieci krystalicznej, czyli przy  $\lambda > 10^{-6} \text{ cm}$  ( $\nu < 10^{11} \text{ Hz}$ ) [3]. Za punkt wyjścia wybierzemy fundamentalne równania teorii sprężystości (III.1.19)

$$\rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial t_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{i3}}{\partial x_3} . \quad (\text{III.4.1})$$

Tu zgodnie z wyprowadzeniem wzoru (III.4.1)  $x_i(t)$  są składowe wektora przemieszczenia punktu dowolnego w kryształ. Ponieważ interesują nas nie rzeczywiste przemieszczenia punktów, lecz ich względne przemieszczenie w stosunku do siebie, zapiszmy zamiast  $x_i(t)$  w lewej części (III.4.1)  $u_i(\vec{r}, t) = x_i(t) - x_{i0}$ , gdzie  $x_{i0}$  - składowe wektora, określającego położenie równowagi punktu w kryształ albo położenie punktu przed deformacją kryształu. Wtedy w przypadku małych odkształceń zupełną pochodną  $x_i(t)$  względem czasu możemy zamienić, z dokładnością do wyrazów drugiego rzędu cząstkową pochodną przemieszczenia  $u_i(\vec{r}, t)$  względem czasu [15,16]

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + e_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial t} \approx \frac{\partial u_i}{\partial t} . \quad (\text{III.4.2})$$

Uwzględniając wzór (III.4.2) otrzymujemy następujące równania ruchu klasycznego ośrodka sprężystego:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial t_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{i3}}{\partial x_3} = \sum_j \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} . \quad (\text{III.4.3})$$

Biorąc pod uwagę prawo Hooke'a (III.3.4) oraz jawną postać składowych tensora odkształcenia  $r_{ij}$  (wzory (III.2.8) i (III.2.3)) znajdujemy

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = c_{ijkl} \frac{\partial r_{kl}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} c_{ijkl} \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \right) = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} . \quad (\text{III.4.4})$$

Po podstawieniu (III.4.4) do (III.4.3) mamy

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} . \quad (\text{III.4.5})$$

Rozwiązanie układu równań (III.4.5) będziemy szukali w postaci fali płaskiej

$$\begin{aligned} u_i(\vec{r}, t) &= A \cdot p_i \cdot \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \\ &= A \cdot p_i \cdot \exp[ik(\vec{m} \cdot \vec{r} - v_\varphi t)] \end{aligned} \quad (\text{III.4.6})$$

gdzie  $A$  - amplituda fali; wektor polaryzacji  $\vec{p}$  określa kierunek przemieszczenia (drgań) punktu ( $|\vec{p}| = 1$ );  $\vec{k} = (2\pi/\lambda) \cdot \vec{m}$  - wektor falowy;  $\omega = k \cdot v_\varphi$  - częstość kątowna;  $v_\varphi$  - prędkość fazowa fali.

Wstawiając rozwiązanie (III.4.6) do układu równań (III.4.5) otrzymamy następujący układ równań algebraicznych

$$(c_{ijkl} m_j m_k - \rho v_\varphi^2 \delta_{il}) \cdot p_l = 0 . \quad (\text{III.4.7})$$

Wprowadzając **tensor akustyczny** (tensor Christoffella)

$$Q_{il} = c_{ijkl} m_j m_m , \quad (\text{III.4.8})$$

$$Q_{il} = c_{ijkl} m_j m_m , \quad (\text{III.4.8})$$

który ma właściwość (symetrię)

$$Q_{il} = Q_{li} , \quad (\text{III.4.9})$$

sprowadźmy układ równań (III.4.7) do postaci

$$(Q_{il} - \rho v_\varphi^2 \delta_{il}) \cdot p_l = 0 . \quad (\text{III.4.10})$$

Układ równań (III.4.10) jest to układ równań na wartości własne i wektory własne tensora akustycznego  $Q_{il}$ , a zatem wektory polaryzacji  $\vec{p}$  fal sprężystych rozchodzących się w kryształach w kierunku określonym wektorem  $\vec{m}$  są to wektory własne tensora Christoffella. Układ równań (III.4.10) ma niezerowe rozwiązanie, gdy

$$\begin{vmatrix} Q_{11} - \rho v_\varphi^2 & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} - \rho v_\varphi^2 & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} - \rho v_\varphi^2 \end{vmatrix} = 0 . \quad (\text{III.4.11})$$

W ogólnym przypadku rozwiązując równanie (III.4.11) otrzymujemy trzy wartości prędkości fazowej  $v_{1\varphi}$ ,  $v_{2\varphi}$ ,  $v_{3\varphi}$ :

$$v_{j\varphi} = \sqrt{\frac{q_j}{\rho}} , \quad (\text{III.4.12})$$

gdzie  $q_j$  są wartościami własnymi tensora akustycznego  $Q_{jl}$ .

Następnie po podstawieniu do układu równań (III.4.10) tych wartości prędkości fazowej znajdziemy odpowiednie trzy wektory polaryzacji  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ . A więc, w ogólnym przypadku w kierunku, określonym przez jednostkowy wektor  $\vec{m}$  w kryształach mogą rozchodzić się trzy fale mające różne (ale określone) polaryzacje oraz prędkości. Najczęściej wektory  $\vec{p}_i$  polaryzacji trzech fal sprężystych nie pokrywają się z wektorem  $\vec{m}$  i nie są prostopadłe do niego. A więc fale sprężyste nie są ani falami podłużnymi, ani poprzecznymi. Prędkości fazowe fal sprężystych, jak wynika ze wzoru (III.4.12), nie zależą od częstości fali, a zatem fale sprężyste nie ulegają dyspersji.

W kryształach kierunek rozprzestrzeniania się energii fali sprężystej (kierunek **promienia** fali) określa **wektor prędkości grupowej** fali  $\vec{v}_g$ . W ogólnym przypadku kierunek wektora  $\vec{v}_g$  nie pokrywa się z kierunkiem wektora falowego  $\vec{m}$  prostopadłego do czoła fali, a kąt między wektorami  $\vec{m}$  i  $\vec{v}_g$  może wynosić dziesiątki stopni. Żeby znaleźć kierunek wektora  $\vec{v}_g$  pomnożmy lewą część równania (III.4.7) skalarnie przez wektor  $\vec{p} \cdot (2\pi/\lambda)^2$

$$c_{ijml} k_j k_m p_i p_l = \rho \omega^2 . \quad (\text{III.4.13})$$

Tu uwzględniliśmy, iż  $\vec{k} = (2\pi/\lambda) \cdot \vec{m}$  i  $\omega = k \cdot v_\varphi$ .

Składowe wektora prędkości grupowej fali  $\vec{v}_g$  określa wzór

$$v_{gn} = \frac{\partial \omega}{\partial k_n} . \quad (\text{III.4.14})$$

Różniczkując wzór (III.4.13) względem składowych wektora  $\vec{k}$  i uwzględniając (III.4.14) otrzymujemy

$$v_{gn} = \frac{1}{\rho \omega} \cdot c_{inml} p_i p_l k_m . \quad (\text{III.4.15})$$

Wprowadzając tensor drugiego rzędu

$$P_{nm} = c_{inml} p_i p_l , \quad (\text{III.4.16})$$

zapiszmy wzór (III.4.15) w postaci

$$v_{gn} = \frac{1}{\rho v_\varphi} \cdot P_{nk} m_k , \quad (\text{III.4.17})$$

gdzie  $m_k$  są to składowe wektora  $\vec{m} = \vec{k} / |\vec{k}|$ .

Tensor  $P_{nk}$  nazywa się **drugim tensorem akustycznym** (albo drugim tensorem Christoffela).

Fale sprężyste dla których  $\vec{v}_g \parallel \vec{m}$  nazywamy **zwyczajnymi**. Fale sprężyste dla których

kierunek wektora prędkości grupowej  $\vec{v}_g$  nie pokrywa się z kierunkiem wektora  $\vec{m} = \vec{k} / |\vec{k}|$  nazywamy **nadzwyczajnymi**.

*Przykład III.4.1.* Wykażemy, że rzut wektora prędkości grupowej fali sprężystej  $\vec{v}_g$  na kierunek wektora  $\vec{m}$  wynosi

$$(\vec{v}_g \cdot \vec{m}) = v_\varphi \quad . \quad (III.4.18)$$

Pomnożmy skalarnie (III.4.15) przez wektor  $\vec{m}$

$$\begin{aligned} v_{gn} \cdot m_n &= \frac{1}{\rho v_\varphi} \cdot m_n P_{nk} m_k \\ &= \frac{1}{\rho v_\varphi} \cdot c_{inkl} m_n m_k p_i p_l = \frac{1}{\rho v_\varphi} \cdot \rho v_\varphi^2 = v_\varphi \end{aligned} \quad . \quad (III.4.19)$$

Tu uwzględniliśmy wzór (III.4.13).

*Przykład III.4.2.* Udowodnimy, że podłużne fali sprężyste są zawsze falami zwyczajnymi i dla fal zwyczajnych  $v_g = v_\varphi$ .

W fale sprężystej podłużnej przemieszczenia punktów ciała odbywa się w kierunku rozprzestrzeniania się fali, czyli w fale podłużnej wektor polaryzacji  $\vec{p}$  pokrywa się z wektorem  $\vec{m}$ . A zatem, zamieniając we wzorze (III.4.17)  $p_k$  przez  $m_k$ , składowe  $m_k$  przez  $p_k$ , korzystając z symetrii tensora  $c_{ijkl}$  ( $c_{ijkl} = c_{nikl} = c_{nilk}$ ) i uwzględniając wzór (III.4.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} v_{gn} &= \frac{1}{\rho v_\varphi} \cdot c_{inkl} p_i p_l m_k = \frac{1}{\rho v_\varphi} \cdot c_{nilk} m_i m_l p_k \\ &= \frac{1}{\rho v_\varphi} \cdot \rho v_\varphi^2 \delta_{nk} p_k = v_\varphi m_n \end{aligned} \quad . \quad (III.4.20)$$

*Przykład III.4.3.* Rozważmy fali sprężyste w kryształach układu trygonalnego (klasy  $32,3m, \bar{3}m$ ) rozchodzące się w kierunku osi symetrii kryształu.

W tym przypadku  $\vec{m} = \vec{e}_3$  i zgodnie ze wzorem (III.4.8) i wzorem (III.3.45) tensor akustyczny Christofella  $Q_{il}$  ma postać

$$Q_{il} = c_{i33l} = \begin{vmatrix} c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{vmatrix}. \quad (\text{III.4.21})$$

Tensor (III.4.21) ma postać diagonalną, a zatem ma wartości główne:  $q_1 = q_2 = c_{44}$ ,  $q_3 = c_{33}$ .

Wartość główna  $q_3 = c_{33}$  odpowiada podłużnej fali sprężystej rozchodzącej się w kierunku osi symetrii z prędkością fazową równą, zgodnie z (III.4.12):

$$v_{3\varphi} = \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}}. \quad (\text{III.4.22})$$

Wartościom głównym  $q_1 = q_2 = c_{44}$  odpowiada mnóstwo fal poprzecznych, których wektory polaryzacji znajdują się w płaszczyźnie prostopadłej do osi symetrii:

$$\vec{p} = \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2. \quad (\text{III.4.23})$$

Tu kąt  $\varphi$  określa położenie wektora polaryzacji fali w płaszczyźnie prostopadłej do osi symetrii kryształu.

Zgodnie z (III.4.12), prędkość fazowa tych fal wynosi

$$v_{1\varphi} = v_{2\varphi} = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}}. \quad (\text{III.4.24})$$

*Przykład III.4.4.* Korzystając z wyników rozwiązania zadania (III.4.3) wykażemy, iż wektory prędkości grupowej  $\vec{v}_g$  fal poprzecznych tworzą stożek. To zjawisko w akustyce kryształów nosi nazwę **wewnętrznej refrakcji konicznej**.

Zgodnie z (III.4.23) i (III.4.16) drugi tensor akustyczny Christofella  $P_{il}$  ma dla fal poprzecznych postać

$$P_{il} = c_{i11l} \cos^2 \varphi + c_{i22l} \sin^2 \varphi + (c_{i12l} + c_{i21l}) \sin \varphi \cos \varphi. \quad (\text{III.4.25})$$

Biorąc pod uwagę postać tensora  $c_{imnl}$  dla kryształów układu trygonalnego (wzór (III.3.45)) otrzymujemy

$$P_{il} = \begin{vmatrix} c_{11} \cos^2 \varphi + c_{66} \sin^2 \varphi & (c_{11} - c_{66}) \cos \varphi \sin \varphi & 2c_{14} \sin \varphi \cos \varphi \\ (c_{11} - c_{66}) \cos \varphi \sin \varphi & c_{11} \sin^2 \varphi + c_{66} \cos^2 \varphi & c_{14} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\ 2c_{14} \sin \varphi \cos \varphi & c_{14} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) & c_{44} \end{vmatrix}. \quad (\text{III.4.26})$$

Ze wzoru (III.4.7) wynika, że prędkość grupową fal poprzecznych określa wzór

$$v_{gi} = \frac{1}{\rho v_\varphi} \cdot P_{i3}. \quad (\text{III.4.27})$$

Po podstawieniu do wzoru (III.4.27)  $P_{i3}$  ze wzory (III.4.26) i biorąc pod uwagę (III.4.24) otrzymujemy

$$\vec{v}_g = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} \left[ \frac{c_{14}}{c_{44}} (\sin 2\varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos 2\varphi \cdot \vec{e}_2) + \vec{e}_3 \right]. \quad (\text{III.4.28})$$

Ze wzoru (III.4.28) wynika, że promień każdej z poprzecznie spolaryzowanych fal tworzy kąt  $\psi$  z kierunkiem wektora falowego  $\vec{m}$

$$\psi = \arccos \cdot \operatorname{tg} \frac{c_{14}}{c_{44}}. \quad (\text{III.4.29})$$

A więc, promienie wszystkich poprzecznie spolaryzowanych fal sprężystych (III.4.23) tworzą kołowy stożek.

#### Zadania do § III.4

1. Wykazać, że kąt  $\psi$  między wektorami  $\vec{m}$  i  $\vec{s}$  ( $\vec{s} = \vec{v}_g / v_\varphi$ ) określa wzór

$$\cos \psi = \frac{\rho v_\varphi^2}{\sqrt{P_{ij} P_{ik} m_j m_k}}.$$

2. Udowodnić, iż w kryształach układu regularnego odchylenie promieni fal sprężystych spolaryzowanych poprzecznie do kierunku  $[111]$  ( $\vec{m} \parallel [111]$ ) określa wzór

$$\psi = \arccos \cdot \operatorname{tg} \frac{c_{11} - c_{12} - 2c_{44}}{\sqrt{2}(c_{11} - c_{12} + c_{44})}.$$

3. Wykazać, że prędkości fazowe fali podłużnej  $v_{\parallel\varphi}$  i fali poprzecznej  $v_{\perp\varphi}$  rozchodzących się w kierunku  $[111]$  w kryształach układu regularnego są równe

$$v_{\parallel\varphi} = \sqrt{\frac{c_{11} + 2(c_{12} + c_{44})}{3\rho}},$$



$$v_{\perp\varphi} = \sqrt{\frac{c_{11} - c_{12} + c_{44}/2}{3\rho}} .$$

4. Wykazać, że prędkości fazowe fali podłużnej  $v_{\parallel\varphi}$  i fali poprzecznej  $v_{\perp\varphi}$  rozchodzących się w kierunku [100] w kryształach układu regularnego są równe

$$v_{\parallel\varphi} = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} ,$$

$$v_{\perp\varphi} = \sqrt{\frac{c_{44}}{2\rho}} .$$

5. Wykazać, że prędkości fazowe fali podłużnej  $v_{\parallel\varphi}$  i fali poprzecznej  $v_{\perp\varphi}$  rozchodzących się w kierunku [110] w kryształach układu regularnego są równe

$$v_{\parallel\varphi} = \sqrt{\frac{c_{11} + c_{12} + c_{44}}{2\rho}} ,$$

$$v_{\perp\varphi} = \sqrt{\frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho}} .$$

### III.5 Zjawisko piezoelektryczności

Rozróżniamy efekt piezoelektryczny prosty i odwrotny (patrz tabelę II.3.1). Efekt piezoelektryczny prosty obejmuje zjawiska polegające na tym, że w pewnych kryształach naprężenia mechaniczne albo deformacje powodują wystąpienie w nich polaryzacji elektrycznej albo pola elektrycznego, które są wprost proporcjonalne do wielkości przyłożonego naprężenia albo deformacji [5,6]. Prostym efektem piezoelektrycznym opisują cztery równania [5,6]:

$$P_i = d_{ijk} t_{jk} , \quad P_i = e_{ijk} r_{jk} , \quad (\text{III.5.1a})$$

$$E_i = -g_{ijk} t_{jk} , \quad E_i = -h_{ijk} r_{jk} . \quad (\text{III.5.1b})$$

We wzorach (III.5.1)  $P_i$  i  $E_i$  są składowymi wektora polaryzacji elektrycznej i wektora natężenia pola elektrycznego;  $t_{jk}$  i  $r_{jk}$  – składowe tensora naprężenia i tensora deformacji.

Efekt piezoelektryczny odwrotny, jak widać z nazwy efektu, obejmuje grupę zjawisk polegających na tym, że kryształ pod wpływem z zewnątrz pola elektrycznego albo zmiany

polaryzacji elektrycznej kryształu deformuje się i zmienia swój kształt. Odwrotny efekt piezoelektryczny opisują też cztery równania [5,6]:

$$r_{jk} = d_{ijk} E_i, \quad r_{jk} = g_{ijk} P_i, \quad (\text{III.5.2a})$$

$$t_{jk} = -e_{ijk} E_i, \quad t_{jk} = -h_{ijk} P_i. \quad (\text{III.5.2b})$$

We wzorach (III.5.1) i (III.5.2) wielkości  $d_{ijk}$ ,  $e_{ijk}$ ,  $g_{ijk}$ ,  $h_{ijk}$ , określające efekt piezoelektryczny prosty i odwrotny, tworzą odpowiednie tensory trzeciego rzędu – **tensory współczynników piezoelektryczności**. Współczynniki  $d_{ijk}$  zwykle nazywane są **modułami piezoelektryczności**.

W ogólnym przypadku tensor trzeciego rzędu ma  $3^3 = 27$  składowych. Jednak wskutek tego, że tensory drugiego rzędu  $t_{jk}$  i  $r_{jk}$  są tensorami symetrycznymi ( $t_{jk} = t_{kj}$ ;  $r_{jk} = r_{kj}$ ) ze wzorów (III.5.1) i (III.5.2) wynika, że tylko 18 składowych tych tensorów jest niezależnych. Istotnie, biorąc pod uwagę symetrię tensora  $t_{jk}$ , na przykład wzór (III.5.1a) możemy zapisać w postaci

$$P_i = \frac{(d_{ijk} + d_{ikj})}{2} \cdot t_{jk}. \quad (\text{III.5.3})$$

Stąd widzimy, że współczynniki  $d_{ijk}$  i  $d_{ikj}$  występują parami w równaniu prostego efektu piezoelektrycznego. Oznacza to, że nie można przeprowadzić takiego eksperymentu, który pozwoliłby zmierzyć oddzielnie  $d_{ijk}$  i  $d_{ikj}$ . Zawsze będziemy mierzyli sumę tych dwóch składowych tensora  $d_{ijk}$ . Ten element niejednoznaczności w wyborze pojedynczych współczynników  $d_{ijk}$  i  $d_{ikj}$  możemy usunąć zakładając, że

$$d_{ijk} = d_{ikj}. \quad (\text{III.5.4})$$

Symetria (III.5.4) tensora  $d_{ijk}$  względem wskaźników  $j$  i  $k$  zmniejsza liczbę niezależnych składowych tensora  $d_{ijk}$  do osiemnastu.

Podobne rozumowania, przeprowadzone dla tensorów  $e_{ijk}$ ,  $g_{ijk}$ ,  $h_{ijk}$  doprowadzą do wniosku, że te tensory również mają tylko 18 niezależnych składowych.

Współczynniki  $d_{ijk}$ ,  $e_{ijk}$ ,  $g_{ijk}$ ,  $h_{ijk}$  nie są niezależne od siebie. Na przykład, korzystając z uogólnionego prawa Hooke'a (III.3.3) łatwo otrzymać ze wzorów (III.5.1a) i (III.5.1b)

$$d_{mjk} E_m = r_{jk} = s_{jknl} t_{nl} = -s_{jknl} e_{mnl} E_m ,$$

skąd

$$d_{mjk} = -s_{jknl} e_{mnl} . \quad (\text{III.5.6})$$

W podobny sposób możemy znaleźć, że

$$e_{mjk} E_m = -t_{jk} = -c_{jknl} r_{nl} = -c_{jknl} d_{mnl} E_m ,$$

skąd

$$e_{mjk} = -c_{jknl} d_{mnl} . \quad (\text{III.5.7})$$

Fakt, iż składowe tensorów  $t_{jk}$ ,  $r_{jk}$ , oraz tensorów  $d_{ijk}$ ,  $e_{ijk}$ ,  $g_{ijk}$ ,  $h_{ijk}$  są symetryczne ze względu na wskaźniki  $j$  i  $k$ , daje możliwość wprowadzenia bardziej zwięzłego zapisu równań efektu piezoelektrycznego, znanego pod nazwą zapisu macierzowego [5]. W tym celu zastępujemy dwa wskaźniki  $j$  i  $k$  w równaniach (III.5.1) i (III.5.2) jednym wskaźnikiem, zmieniającym się od 1 do 6 zgodnie z regułą:

Zapis wskaźników (jk) Tensorowy	11	22	33	23,32	31,13	12,21
Zapis macierzowy (m) wskaźników (jk)	1	2	3	4	5	6

(III.5.8)

$$\begin{aligned} d_{ijk} &= d_{im} , & \text{gdy } m &= 1,2 \text{ lub } 3; \quad i = 1,2,3, \\ 2d_{ijk} &= d_{im} , & \text{gdy } m &= 4,5 \text{ lub } 6; \quad i = 1,2,3. \end{aligned} \quad (\text{III.5.9})$$

Wprowadzenie czynnika 2 w definicji składowych  $d_{im}$  ( $m = 4,5,6$ ) jest związane z chęcią uniknięcia tego czynnika w zapisie macierzowym równań efektu piezoelektrycznego, które przyjmują teraz postać:

$$P_i = d_{im} t_m , \quad P_i = e_{im} r_m , \quad (\text{III.5.10a})$$

$$E_i = -g_{im} t_m , \quad E_i = -h_{im} r_m , \quad (\text{III.5.10b})$$

$$r_m = d_{im} E_i , \quad r_m = g_{im} P_i , \quad (\text{III.5.11a})$$

$$t_m = -e_{im} E_i , \quad t_m = -h_{im} P_i . \quad (\text{III.5.11b})$$

Oznaczenie składowych tensorów  $d_{ijk}$ ,  $e_{ijk}$ ,  $g_{ijk}$ ,  $h_{ijk}$  za pomocą dwóch wskaźników daje możliwość zapisu wszystkich współczynników piezoelektryczności w postaci tabelki. Na przykład moduły piezoelektryczności  $d_{ijk}$  możemy zapisać jako

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix}. \quad (\text{III.5.12})$$

Należy jednak zawsze pamiętać, że współczynniki  $d_{im}$ , charakteryzujące się dwoma wskaźnikami, nie transformują się jak składowe tensora drugiego rzędu.

Tensory  $d_{im}$ ,  $e_{im}$ ,  $g_{im}$ ,  $h_{im}$  są tensorami materii, a więc występująca w kryształach symetria, zgodnie z zasadą Neumanna, redukuje w znacznym stopniu liczbę niezależnych współczynników piezoelektryczności. W przykładzie II.4.1 wykazaliśmy, że kryształy w których występuje środek symetrii nie mogą mieć własności piezoelektrycznych. Efekt piezoelektryczny może występować tylko w kryształach należących do 10-ciu klas polarnych, co stanowi cenną wskazówkę przy analizie struktury kryształów metodą rentgenograficzną [9,10].

W praktyce efekt piezoelektryczny najczęściej bada się ściskając cienką płytkę wyciętą z kryształu (patrz rys.II.2.1). W ogólnym przypadku przy ściskaniu płytki piezoelektryka powstająca polaryzacja elektryczna jest skierowana nie zawsze prostopadle do powierzchni płytki. Jeżeli okładki metalowe, za pomocą których mierzymy indukowane na powierzchni płytki ładunki elektryczne, są rozmieszczone tak jak na rys.II.2.1, to doświadczalnie będziemy mierzyli tylko podłużną składową polaryzacji elektrycznej, tj. składową  $P_{\parallel}$  wektora polaryzacji  $\vec{P}$ , równoległą do kierunku działania naprężenia ściskającego płytkę. Mierzony w taki sposób efekt piezoelektryczny nazywamy **podłużnym**. Podłużny efekt piezoelektryczny możemy przedstawić graficznie za pomocą powierzchni podłużnego efektu piezoelektrycznego [5,6]. Promień wodzący tej powierzchni pokrywa się z kierunkiem działania siły ściskającej, długość zaś jest proporcjonalna do ładunku elektrycznego indukowanego działaniem jednostki siły na jednostkę powierzchni płytki, wyciętej prostopadle do kierunku działającej siły.

Efekty piezoelektryczne prosty i odwrotny zawsze są powiązane między sobą. Naprężenie zewnętrzne przyłożone do kryształu piezoelektrycznego wskutek prostego efektu piezoelektrycznego wywołuje w nim polaryzację. Z kolei ładunki elektryczne indukowane na

powierzchni piezoelektryka wytwarzają pole elektryczne, które prowadzi, wskutek odwrotnego efektu, do jego deformacji. Ważną charakterystyką piezoelektryka z punktu widzenia jego zastosowań w przetwornikach jest czynnik sprzężenia elektromechanicznego  $k$ , który określamy dla prostego efektu jako

$$k = \sqrt{\frac{\text{zmagazynowana energia elektryczna}}{\text{zmagazynowana energia mechaniczna}}} \quad (\text{III.5.13})$$

*Przykład III.5.1.* Obliczymy czynnik sprzężenia elektromechanicznego  $k$  na przykładzie cienkiej płytki wyciętej z piezoelektryka na którą działa para sił (rys.II.2.1). Jeżeli oznaczymy przez  $\vec{n}$  wektor jednostkowy normalny do powierzchni płytki, to tensor naprężenia w przypadku efektu podłużnego ma składowe (patrz wzór (III.1.32))

$$t_{ij} = t \cdot n_i n_j \quad (\text{III.5.14})$$

Umówmy się, że dla naprężenia ściskającego płytkę ( $t > 0$ ).

Gęstość powierzchniowa ładunku elektrycznego które powstaje na powierzchni płytki wskutek prostego efektu piezoelektrycznego wynosi

$$\sigma = |\vec{n} \cdot \vec{P}| = |P_n|, \quad (\text{III.5.15})$$

gdzie  $P_n$  - składowa wektora polaryzacji wzdłuż kierunku prostopadłego do powierzchni płytki.

Zgodnie z równaniem prostego efektu piezoelektrycznego (III.5.10a) mamy

$$P_n = d_{33} \cdot t \quad (\text{III.5.16})$$

Tu  $Oz$  wybraliśmy wzdłuż jednostkowego wektora  $\vec{n}$ .

Występujące na przeciwległych powierzchniach płytki ładunki elektryczne wytwarzają pole elektryczne, które ma kierunek przeciwny do wektora polaryzacji. Składowa natężenia tego pola wzdłuż osi  $Oz$  wynosi

$$E_n = - \frac{|\sigma|}{\epsilon_0 \epsilon_{33}} = - \frac{d_{33}}{\epsilon_0 \epsilon_{33}} \cdot t \quad (\text{III.5.17})$$

Zgodnie z równaniem odwrotnego efektu piezoelektrycznego (III.5.11a) i uogólnionym prawem Hooke'a dla składowych tensora deformacji  $r_m$  możemy zapisać

$$r_m = s_{m3} \cdot t - d_{33} E_z = \left( s_{m3} - \frac{d_{33}^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}} \right) \cdot t . \quad (\text{III.5.18})$$

Energia sprężysta płytki o grubości  $a$ , zgodnie z (III.3.19) wynosi

$$W_{sp} = \frac{1}{2} a \cdot t_m r_m = \frac{1}{2} a t^2 s_{33} - \frac{1}{2} a t^2 \frac{d_{33}^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}} . \quad (\text{III.5.19})$$

Energia elektryczna zmagazynowana w spolaryzowanej płytce na jednostce pola powierzchni płytki jest równa

$$W_{el} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}}{a} \cdot \left( a \cdot \frac{d_{33}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}} \cdot t \right)^2 = \frac{1}{2} a t^2 \frac{d_{33}^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}} . \quad (\text{III.5.20})$$

Z porównania wzorów (III.5.19) i (III.5.20) widzimy, że energia sprężysta płytki zmniejsza się o tyle o ile rośnie energia związana z polaryzacją płytki. Stosunek  $W_{el} / (W_{el} + W_{sp})$  właśnie określa tę część energii mechanicznej  $R_{mech} = W_{el} + W_{sp}$  która została zużyta na polaryzację płytki. Więc, dla czynnika sprzężenia elektromechanicznego  $k$  otrzymujemy

$$k = \sqrt{\frac{W_{el}}{R_{mech}}} = \frac{d_{33}}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_{33} s_{33}}} . \quad (\text{III.5.21})$$

W przypadku efektu odwrotnego zewnętrzne pole elektryczne powoduje deformację płytki wzdłuż osi  $Oz$ :  $r_3 = d_{33} E_3$ . Deformacja płytki, wskutek prostego efektu, wywołuje polaryzację płytki ( $P_3 = e_{33} r_3 = e_{33} d_{33} E_3 = -c_{33} d_{33} d_{33} E_3$ ). Wypadkowe pole elektryczne będzie równe sumie pola zewnętrznego i pola indukowanych ładunków. Składowa wypadkowego pola elektrycznego wzdłuż osi  $Oz$  wynosi więc

$$E_n = E_3 \left( 1 - \frac{d_{33} c_{33} d_{33}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}} \right) . \quad (\text{III.5.22})$$

Energia sprężysta płytki grubości  $a$  wynosi

$$W_{sp} = \frac{1}{2} a \cdot t_m r_m = \frac{1}{2} a \cdot c_{mk} r_k r_m = \frac{1}{2} a E_3^2 (d_{33} c_{33} d_{33}) . \quad (\text{III.5.23})$$

Energia pola elektrycznego, zgodnie z (III.5.22), zmagazynowana w płytce jest równa

$$\begin{aligned}
W_{el} &= \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}}{a} \cdot E_3^2 a^2 \cdot \left(1 - \frac{d_{33} c_{33} d_{33}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}}\right)^2 \\
&\equiv \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{33} a E_3^2 - a E_3^2 (d_{33} c_{33} d_{33})
\end{aligned}
\tag{III.5.24}$$

Z porównania wzorów (III.5.23) i (III.5.24) widzimy, że energia elektryczna płytki zmniejsza się i idzie na polaryzację i deformację płytki. Stosunek  $W_{sp}/(W_{el} + 2W_{sp})$  właśnie określa tą część energii elektrycznej  $R_{el} = W_{el} + 2W_{sp}$  która została zużyta na deformację płytki. Więc, dla czynnika sprzężenia elektromechanicznego  $k$  w tym przypadku otrzymujemy

$$k = \sqrt{\frac{W_{sp}}{R_{el}}} = d_{33} \sqrt{\frac{c_{33}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{33}}}
\tag{III.5.25}$$

*Przykład III.5.2.* Wykażemy, że macierz  $d_{im}$  modułów piezoelektryczności ferroelektryka winianu sodowo - potasowego (sól Siegnette'a ,  $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$  , grupa punktowa 222) ma postać

$$[d_{im}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}
\tag{III.5.26}$$

Skorzystamy z metody bezpośredniego sprawdzania. Rozważmy najpierw przekształcenie składowych tensora  $d_{ijk}$  wskutek działania osi dwukrotnej równoległej do osi  $Ox_3$ . Obrót układu współrzędnych dookoła tej osi o kąt  $180^\circ$  doprowadzi do następujących przekształceń współrzędnych:  $x_1 \rightarrow -x_1$  ,  $x_2 \rightarrow -x_2$  ,  $x_3 \rightarrow x_3$ . Stąd otrzymujemy, że niezerowe jest 8 modułów:  $d_{14}$  ,  $d_{15}$  ,  $d_{24}$  ,  $d_{25}$  ,  $d_{31}$  ,  $d_{32}$  ,  $d_{33}$  ,  $d_{36}$ . Rozważmy teraz przekształcenie składowych tensora  $d_{ijk}$  wskutek działania osi dwukrotnej równoległej do osi  $Ox_2$ . Obrót układu współrzędnych dookoła tej osi o kąt  $180^\circ$  doprowadzi do następujących przekształceń współrzędnych:  $x_1 \rightarrow -x_1$  ,  $x_2 \rightarrow x_2$  ,  $x_3 \rightarrow -x_3$ . Stąd otrzymujemy, że spośród 8 modułów pięć jest równych zero:  $d_{15} = 0$  ,  $d_{24} = 0$  ,  $d_{31} = d_{32} = d_{33} = 0$ . A więc macierz modułów piezoelektryczności soli Siegnette'a ma trzy niezerowe moduły i ma postać (II.5.26).

*Przykład III.5.3.* Wykażemy, że równanie powierzchni podłużnego efektu piezoelektrycznego ma postać

$$r = n_i n_j n_k d_{ijk} . \quad (\text{III.5.27})$$

Tu  $r$  - długość promienia wodzącego w kierunku określonym jednostkowym wektorem  $\vec{n}$ ;  $n_i$  - cosinusy kierunkowe wektora  $\vec{n}$  w wybranym układzie współrzędnych.

Niech układ współrzędnych  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  jest krystalofizycznym układem współrzędnych (patrz Rozdział I). Wprowadźmy nowy układ współrzędnych  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$ , związany z płytką tak aby oś  $Ox'_1$  była prostopadła do powierzchni płytki. Jeżeli poddajemy płytkę działaniu naprężenia rozciągającego o kierunku prostopadłym do powierzchni płytki, w płytce z piezoelektryka wystąpi polaryzacja o składowych we wszystkich trzech kierunkach  $Ox'_1, Ox'_2, Ox'_3$ . Zgodnie ze wzorem (III.5.1a), składowa wektora polaryzacji w kierunku osi  $Ox'_1$ , którą mierzymy w efekcie podłużnym, wynosi

$$P'_1 = d'_{111} \cdot t'_{11} . \quad (\text{III.5.28})$$

Tu  $d'_{111}$  jest składową tensora modułów piezoelektryczności w „primowanym” układzie współrzędnych.

Zgodnie z określeniem powierzchni charakterystycznej podłużnego efektu piezoelektrycznego promień wodzący tej powierzchni w kierunku osi  $Ox'_1$  jest równy modułowi  $d'_{111}$  ( $|P'_1| = |\sigma|$ , gdzie  $\sigma$  jest gęstością powierzchniową ładunku polaryzacyjnego), a więc

$$r = d'_{111} . \quad (\text{III.5.29})$$

Korzystając z reguł transformacji składowych tensora trzeciego rzędu, wzór (III.5.29) możemy zapisać w postaci

$$r = \alpha_{1'i} \alpha_{1'j} \alpha_{1'k} d'_{ijk} . \quad (\text{III.5.30})$$

Zamieniając we wzorze (III.5.30) wskaźnik  $1'$  na  $n$  i biorąc pod uwagę, że  $\alpha_{ni} = n_i$ , otrzymujemy wzór (III.5.27).

*Przykład III.5.4.* Wykażemy, że w kryształach soli Siegnette'a istnieją takie kierunki w których podłużny efekt piezoelektryczny nie jest obserwowany.

Sól Siegnette'a, zgodnie z (III.5.26), ma trzy niezerowe moduły piezoelektryczności

$$d_{14} = 2d_{123} , \quad d_{25} = 2d_{231} , \quad d_{36} = 2d_{321} . \quad (\text{III.5.31})$$



Podstawiając (III.5.31) do równania powierzchni podłużnego efektu piezoelektrycznego (III.5.27) mamy

$$r = n_1 n_2 n_3 (2d_{123} + 2d_{231} + 2d_{321}) . \quad (\text{III.5.32})$$

Ze wzoru (III.5.32) wynika, że jeżeli płytkę z kryształu soli Siegnette'a jest ściśnięta wzdłuż jednej z osi dwukrotnej (na przykład  $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$ ), to efekt podłużny nie jest obserwowany. Maksymalny efekt podłużny ma płytka dla której wektor prostopadły do powierzchni płytki pokrywa się z kierunkiem  $[111]$  ( $n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$ ).

*Przykład III.5.5.* Obliczymy czynnik sprzężenia elektromechanicznego  $k$  cienkiej płytki wyciętej z soli Siegnette'a w kształcie prostopadłościanu. Powierzchnia płytki jest zorientowana prostopadle do osi  $Ox_1$  (oś 2). Wektor natężenia pola elektrycznego, wzbudzający poprzeczne drgania płytki, jest równoległy do osi  $Ox_1$ . Krawędź płytki (oś  $Ox_2'$ ) tworzy kąt  $45^\circ$  z osiami  $Ox_3$  (oś 2) i  $Ox_2$  (oś 2).

Zgodnie ze wzorem (III.5.11a) równanie poprzecznego piezoelektrycznego wzbudzenia takiej płytki ma postać

$$r_{2'} = d_{1'2'} E_1 . \quad (\text{III.5.33})$$

Czynnik sprzężenia elektromechanicznego określa w tym przypadku wzór [8]

$$k = \frac{d_{1'2'}}{\sqrt{\varepsilon_{00} \varepsilon_{11} s_{2'2'}}} . \quad (\text{III.5.34})$$

Korzystając z reguł przekształcenia składowych tensora trzeciego rzędu, oraz z postaci macierzy piezoelektrycznych modułów (III.5.26) dla soli Siegnette'a, otrzymujemy

$$\begin{aligned} d_{1'2'} &\equiv d_{1'2'2'} = \alpha_{1'i} \alpha_{2'j} \alpha_{2'k} d_{ijk} \\ &= 2(\alpha_{1'1} \alpha_{2'2} \alpha_{2'3} d_{123} + \alpha_{1'2} \alpha_{2'3} \alpha_{2'1} d_{231} + \alpha_{1'3} \alpha_{2'1} \alpha_{2'2} d_{312}) \end{aligned} . \quad (\text{III.5.35})$$

W sposób podobny, korzystając z reguł przekształcenia składowych tensora czwartego rzędu, oraz z postaci macierzy współczynników sprężystości (III.3.44) dla soli Siegnette'a, otrzymujemy

$$\begin{aligned} s_{2'2'} &\equiv s_{2'2'2'2'} = \alpha_{2'i} \alpha_{2'j} \alpha_{2'k} \alpha_{2'l} s_{ijkl} \\ &= \alpha_{2'2}^4 s_{22} + \alpha_{2'3}^4 s_{33} + 2\alpha_{2'2}^2 \alpha_{2'3}^2 s_{23} + \alpha_{2'2}^2 \alpha_{2'3}^2 s_{44} \end{aligned} . \quad (\text{III.5.36})$$

Uwzględniając, że macierz  $\alpha_{i'j}$  przekształcenia osi współrzędnych ma postać

$$[\alpha_{i'j}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ 0 & -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix},$$

ze wzorów (III.5.34) – (III.5.36) znajdujemy

$$k = \frac{d_{14}}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_{11}(s_{22} + s_{33} + s_{44} + 2s_{23})}}. \quad (\text{III.5.37})$$

### Zadania do § III.5

1. Stosując metodę bezpośredniego sprawdzania wykazać, że macierz  $d_{im}$  modułów piezoelektryczności kwarcu (grupa punktowa 32) ma postać

$$[d_{im}] = \begin{bmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Wykazać, że przekrój powierzchni podłużnego efektu kwarcu płaszczyzną w której leżą 2-krotne osi symetrii określa wzór

$$r = d_{11} \cdot \cos 3\theta,$$

gdzie  $\theta$  jest kątem, który tworzy promień wodzący z osią symetrii 2 (oś  $OX_1$ ).

3. Udowodnić, że kryształy klasy 4 posiadają oś  $\infty$ -krotną względem właściwości piezoelektrycznych.

4. Wykazać, że dla kryształów klasy 422 oraz 622 podłużny efekt piezoelektryczny nie jest obserwowany w żadnym kierunku.

5. Wyprowadzić równanie podłużnego efektu piezoelektrycznego kwarcu. Znaleźć kierunki w których podłużny efekt piezoelektryczny nie jest obserwowany.

*Odpowiedź:*  $P_{||} = n_1(n_1^2 - 3n_2^2)d_{11}t$ , podłużny efekt piezoelektryczny nie jest obserwowany w kierunku [0001].

6. Wyprowadzić równanie podłużnego efektu piezoelektrycznego chlorku sodu. Znaleźć kierunki w których podłużny efekt piezoelektryczny nie jest obserwowany.

*Odpowiedź:*  $P_{||} = 3n_1n_2n_3d_{14}t$ , podłużny efekt piezoelektryczny nie jest obserwowany w kierunkach typu [hk0].

7. Obliczyć czynnik sprzężenia elektromechanicznego  $k$  cienkiej płytki wyciętej z soli Siegnette'a w kształcie prostopadłościanu. Powierzchnia płytki jest zorientowana prostopadle do osi  $Ox_2$  (oś 2). Wektor natężenia pola elektrycznego, wzbudzający poprzeczne drgania płytki, jest równoległy do osi  $Ox_2$ . Krawędź płytki (oś  $Ox'_1$ ) tworzy kąt  $45^\circ$  z osiami  $Ox_3$  (oś 2) i  $Ox_1$  (oś 2).

*Odpowiedź:*

$$k = \frac{d_{25}}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_{11} (s_{11} + s_{33} + s_{55} + 2s_{13})}} .$$