

Ćwiczenie laboratoryjne

**Rozkłady statystyczne w fizyce jądrowej**

## WSTĘP

Różne niekontrolowane zaburzenia zewnętrzne (wahania temperatury, ciśnienia, natężenia prądu itd.) powodują, że wyniki pomiarów dowolnej makroskopowej wielkości są obarczone błędami losowymi. A zatem skutek zewnętrznych zaburzeń oraz niedoskonałości urządzeń pomiarowych liczbowe wartości mierzonej wielkości będą inne przy powtórnych pomiarach i fluktuują dookoła niektórej średniej wartości, która sama jest wielkością losową. Fluktuacji rejestrowanych wielkości można opisać za pomocą ciągłego rozkładu. Zwykle to jest rozkład Gaussa. Losowy rozrzut mierzonych wielkości, związany z zewnętrznymi zaburzeniami oraz z niedoskonałością urządzeń pomiarowych można zmniejszyć ulepszając metodykę pomiaru oraz zmniejszając wpływ zewnętrznych zaburzeń. Przy tym średnia wartość mierzonej wielkości staje się bliżej wartości „rzeczywistej”, czyli wartości nieobciążonej błędami aparaturowymi.

Inna sytuacja ma miejsce w fizyce jądrowej, gdzie fluktuacji rejestrowanych wielkości są związane nie tylko z zaburzeniami z zewnątrz i z niedoskonałością urządzeń pomiarowych. Jeżeli na przykład mierzymy liczbę rozpadów jąder promieniotwórczych za jakiś określony czas, to skutek losowego charakteru rozpadu fluktuuje sama wartość liczby rozpadów. W tym przypadku można w dobrym przybliżeniu założyć, że urządzenie pomiarowe jest idealnym a wpływ zewnętrznych zaburzeń jest znikomo mały. Fluktuacje mierzonej wielkości fizycznej (liczby rozpadów) są teraz dyskretne, a nie ciągłe. Rozkład takich rozpadów opisuje rozkład Poissona albo nawet rozkład dwumianowy.

W mikrofizyce podejście statystyczne odgrywa większą rolę niż w makrofizyce. Statystyka stosuje się tutaj nie tylko przy opracowaniu danych pomiarowych ale również przy badaniu natury samego zjawiska mikroskopowego. Na przykład przy badaniu promieni kosmicznych za pomocą komory Wilsona było zaobserwowano, że rozkład liczby rejestrowanych cząstek nie pokrywa się z rozkładem Poissona. Ta obserwacja stała punktem wyjściowym dla odkrycia i badania strumieni cząstek kosmicznych.

Błędy, związane z metodą pomiaru nazywamy systematycznymi. Na przykład, detektory promieniowania jonizującego oraz liczniki impulsów mają skończony tak zwany „martwy” czas  $\tau$ . Jeżeli w ciągu tego czasu w rejestrujące urządzenie wpadnie kilku cząstek, to licznik policzy te cząstki jako jedną cząstkę. Takie błędy, chociaż i powstają wskutek chaotyczności zjawiska rozpadu jąder, doprowadzają do błędów systematycznych, które zależą od prędkości liczenia oraz parametrów układu rejestracji impulsów.

Celem niniejszego ćwiczenia jest - 1) zapoznanie się z rozkładami statystycznymi, które są stosowane w fizyce jądrowej; 2) zapoznanie się z podstawami testowania hipotez statystycznych; 3) wykonanie pomiarów rozkładów rozpadów jąder promieniotwórczych i zastosowanie statystyki przy opracowaniu otrzymanych danych.

## ROZKŁAD POISSONA

Ponieważ zjawisko rozpadu jąder oraz trafienie tej albo innej cząstki jonizującej w licznik są zderzeniami losowymi, licznik w ciągu równych odstępów czasu będzie rejestrował różną liczbę cząstek. Prawdopodobieństwo  $p_k$  tego, że w ciągu czasu  $t$  licznik zarejestruje  $k$  cząstek określa rozkład Poissona

$$p_k = \frac{(n \cdot t)^k}{k!} e^{-nt}, \quad (1)$$

gdzie  $n$  – strumień cząstek, sens fizyczny którego będzie omówiony niżej.

Rozkład (1) można interpretować dwójako. Wyobraźmy sobie bardzo dużo całkowicie identycznych urządzeń pomiarowych. Niech w ciągu czasu  $t$  licznik z pierwszego urządzenia pomiarowego zarejestrował  $k_1$  cząstek, licznik z drugiego urządzenia pomiarowego zarejestrował  $k_2$  cząstek itd. Wtedy wielkości  $k_1, k_2, \dots$  są rozłożone zgodnie z rozkładem (1).

Rozważmy teraz tylko jedno urządzenie pomiarowe i niech  $k_1, k_2, \dots$  to są liczby zarejestrowanych cząstek w bardzo dużej liczbie równych między sobą czasowych interwałach  $t$ . Jeżeli strumień cząstek pozostaje stałym, to wielkości  $k_1, k_2, \dots$  są też rozłożone zgodnie z rozkładem Poissona.

Średnią liczbę zarejestrowanych cząstek określa wzór

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k. \quad (2)$$

Po podstawieniu (1) do (2) otrzymujemy

$$\bar{k} = e^{-nt} (nt) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nt)^{k-1}}{(k-1)!} = n \cdot t. \quad (3)$$

Ze wzoru (3) wynika, że  $n$  ma sens średniej liczby cząstek zarejestrowanych przez detektor plus licznik w ciągu jednostki czasu. Z uwzględnieniem (3) wzór (1) możemy zapisać w postaci

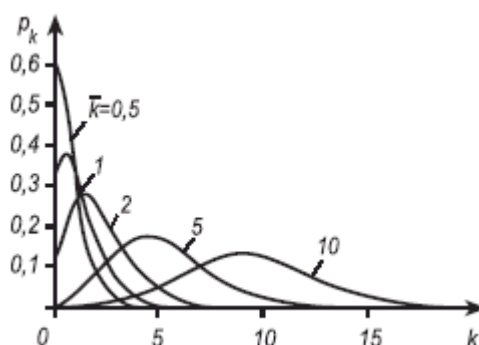
$$p_k = \frac{(\bar{k})^k}{k!} e^{-\bar{k}}, \quad (4)$$

A zatem rozkład Poissona jest całkowicie określony tylko przez jeden parametr -  $\bar{k}$ .

Ze wzoru (4) wynika, że

$$\frac{p_{k+1}(\bar{k})}{p_k(\bar{k})} = \frac{\bar{k}}{k+1}.$$

A więc jeżeli  $\bar{k} \ll 1$ , to ze wzrostem  $k$  funkcja  $p_k$  maleje monotonicznie. Jednak, jeżeli  $\bar{k} > 1$ , to  $p_k$  na początku rośnie osiągając maksimum przy  $k \approx \bar{k}$ , a potem zaczyna maleć monotonicznie.



Rys.1. Zależność  $p_k$  od  $k$ .

Zależność  $p_k$  od  $k$  dla różnych  $\bar{k}$  jest przedstawiona na rys.1. Widać, że dla małych  $\bar{k}$  rozkład Poissona jest asymetryczny. Gdy  $\bar{k}$  wzrasta rozkład  $p_k$  staje się ostrzejszy i bardziej symetryczny względem  $k = \bar{k}$ . Ze wzoru (4) wynika, że dla dowolnej wartości  $\bar{k}$  jest możliwa rejestracja dowolnej liczby cząstek  $k$ . Jednak nie wszystkie zdarzenia spotykają się jednakowo często. Jeśli wielkość  $k$  jest zbliżona do  $\bar{k}$ , to prawdopodobieństwo  $p_k$  jest większe. Miarą odchylenia losowej wielkości  $k$  od jej średniej wartości  $\bar{k}$  (miarą fluktuacji) jest wariancja (dyspersja), którą określa wzór

$$D_k = \overline{(k - \bar{k})^2}. \quad (5)$$

Pierwiastek kwadratowy z wariancji  $\Delta k = \sqrt{D_k}$  nazywamy odchyleniem standardowym (lub odchyleniem średnim lub bezwzględną fluktuacją) losowej zmiennej  $k$ . Wielkość  $\delta k = \Delta k / \bar{k} = \sqrt{D_k} / \bar{k}$  nazywamy średnim odchyleniem kwadratowym (lub względną fluktuacją).

Dla rozkładu Poissona

$$D_k = \bar{k} , \quad (6)$$

$$\Delta k = \sqrt{\bar{k}} , \quad (7)$$

$$\delta k = \frac{1}{\sqrt{\bar{k}}} . \quad (8)$$

Wzory (6) – (8) odgrywają ważną rolę we wszystkich zastosowaniach rozkładu Poissona. Z tych wzorów wynika, że jeżeli będziemy rejestrować cząstki w dużej liczbie równych czasowych interwałów, to w największej części interwałów  $k$  będzie różnić się od  $\bar{k}$  nie więcej niż na  $\sqrt{\bar{k}}$ .

Bezwzględna fluktuacja (7) rośnie ze wzrostem  $\bar{k}$ , jednak przy tym względna fluktuacja (8) zmniejsza się. Stąd można znaleźć liczbę średnią cząstek, którą musimy zarejestrować aby osiągnąć określony względny błąd  $\delta$

$$\bar{k} = \frac{1}{\delta^2} . \quad (9)$$

A zatem dla tego, żeby zmierzyć średnią liczbę cząstek ze statystycznym błędem 10% musimy zarejestrować  $10^2$  cząstek. Dla tego, żeby statystyczny błąd był równy 1% musimy zarejestrować  $10^4$  cząstek itd.

### ZWIĄZEK ROZKŁADU POISSONA Z ROZKŁADEM GAUSSA

Wyżej mówiliśmy, że przy wzroście  $\bar{k}$  rozkład Poissona staje się bardziej symetrycznym względnie  $k = \bar{k}$ . Jeżeli jest spełniony warunek

$$\sqrt{\bar{k}} \gg 1 \quad (10)$$

(praktycznie ten warunek jest spełniony gdy  $k \cong 20$ ), to rozkład Poissona jest prawie symetryczny. Oprócz tego, różnica między wielkościami prawdopodobieństwa dla zbliżonych  $k$  okazuje się bardzo małą. Na przykład, łatwo sprawdzić, że przy  $\bar{k} = 1000$

$$\frac{P_{1000} - P_{995}}{P_{1000}} = 0.01 \quad (11)$$

W tym przypadku ( $\sqrt{\bar{k}} \gg 1$ ) zamiast dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa  $p_k$  możemy stosować ciągły rozkład prawdopodobieństwa  $p(k)$ . Tu  $p(k)dk$  jest prawdopodobieństwem tego, że liczba zarejestrowanych cząstek znajduje się w „nieskończenie małym” przedziale od  $k$  do  $k + dk$ . Przy tym przedział  $dk$  może zawierać kilku jednostek  $k$ , ale on zawsze jest małym w porównaniu ze średnią wielkością  $\bar{k}$ . Można udowodnić, że w tym przypadku rozkład prawdopodobieństwa Poissona przechodzi w rozkład Gaussa

$$p(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{k}}} \exp\left[-\frac{(k - \bar{k})^2}{2\bar{k}}\right] \quad (12)$$

Korzystając ze wzoru (12) można znaleźć prawdopodobieństwo tego, że wielkość  $y = k - \bar{k}$  znajduje się w zakresie od  $y = y_1$  do  $y = y_2$

$$p(y_1 \leq y \leq y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{k}}} \int_{y_1}^{y_2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\bar{k}}\right) dy \quad (13)$$

Wprowadzając nową zmienną  $y = z\sqrt{\bar{k}}$  otrzymujemy

$$p(y_1 \leq y \leq y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_1/\sqrt{\bar{k}}}^{y_2/\sqrt{\bar{k}}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \Phi(y_2/\sqrt{\bar{k}}) - \Phi(y_1/\sqrt{\bar{k}}) \quad (14)$$

gdzie całka

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \quad (15)$$

nosi nazwę całki prawdopodobieństwa.

Wartości całki prawdopodobieństwa są przedstawione prawie w każdym poradniku matematycznym. Za pomocą tabeli całek prawdopodobieństwa można znaleźć prawdopodobieństwo tego, że odchylenie od średniego nie przewyższa po modułu wartości bezwzględnego błędu  $\sqrt{k}$

$$p(|y| \leq \sqrt{k}) = 2\Phi(1) = 0.682 \quad (16)$$

W podobny sposób znajdujemy, że

$$p(|y| \leq 2\sqrt{k}) = 2\Phi(2) = 0.954 \quad (17)$$

$$p(|y| \leq 3\sqrt{k}) = 2\Phi(3) = 0.997 \quad (18)$$

Ze wzorów (16) – (18) wynika, że gdy rejestrujemy wskazania licznika rozpadów jąder promieniotwórczych w serii dużej liczby równych odstępów czasowych, to przy spełnieniu warunku (10), w 68.2% przypadków różnica liczby zarejestrowanych rozpadów od  $\bar{k}$  będzie nie większa niż  $\sqrt{k}$ ; w 95.4% ta różnica będzie mniej niż  $2\sqrt{k}$  a w 99.7%  $|k - \sqrt{k}| \leq 3\sqrt{k}$  itd.

Wynik pomiaru liczby rozpadów  $k$  przedstawiają zawsze razem z bezwzględnym błędem (zawsze to jest  $\sqrt{k}$ ), który określa statystyczny błąd pomiarowy.

Rozkład (12) jest szczególnym przypadkiem rozkładu Gaussa

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right], \quad (19)$$

który zależy od dwóch parametrów -  $\sigma$  i  $\bar{x}$ .

Często rozkład Gaussa przedstawiają jako funkcję zmiennej  $u = (x - \bar{x})/\sigma$

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right). \quad (20)$$

Rozkład (20) ma średnią wartość  $\bar{u} = 0$ , a odchylenie standardowe -  $\Delta u = \sigma_u = 1$ .

Rozkład Gaussa dobrze opisuje wielu statystycznych zjawisk. W fizyce jądrowej rozkład (19) opisuje, na przykład, rozkład kątów sprężystego rozpraszania naładowanych cząstek przechodzących przez substancję; rozkład przebiegów ciężkich naładowanych cząstek w ciele stałym; rozkład pędów po amplitudom przy rejestracji naładowanych cząstek za pomocą półprzewodnikowych i scyntylacyjnych detektorów itd.

Rozkład Gaussa często stosuje się też przy analizie błędów pomiarowych. Szerokie zastosowanie rozkładu Gaussa (rozkładu normalnego) w teorii opracowań danych doświadczalnych jest związane z tym, że rozkład wielkości losowej, która składa się z dużej liczby niezależnych od siebie losowych wielkości z dowolną funkcją rozkładu (na przykład  $\bar{k} = (k_1 + k_2 + \dots + k_n) / n$ ), jest funkcją Gaussa. W teorii prawdopodobieństwa to twierdzenie nosi nazwę centralnego twierdzenia granicznego.

## ROZKŁAD $\chi^2$

Rozkład  $\chi^2$  (chi -kwadrat) znajduje szerokie zastosowanie przy testowaniu prawdziwości hipotez statystycznych, wyliczaniu przedziałów ufności dla parametrów statystycznych, testowaniu statystycznej niezależności zmiennych itd.

Niech  $x_1, x_2, \dots, x_m$  - zbiór  $m$  losowych wielkości, każda z których jest rozłożona zgodnie z rozkładem normalnym ze swoją wartością oczekiwaną (średnią)  $\bar{x}_i$  oraz wariancją  $\sigma_i^2$ . Wskutek przypadkowości wartości  $x_i$  wielkości  $u_i^2 = (x_i - \bar{x}_i)^2 / \sigma_i^2$  oraz ich suma

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m u_i^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{\sigma_i^2} . \quad (21)$$

będą również wielkościami losowymi. Parametr  $k = m - 1$  w (21) nosi nazwę liczby stopni swobody. Ponieważ wielkości  $u_i$  mają wartości oczekiwane  $\bar{u}_i = 0$  i wariancji równe 1, rozkład gęstości prawdopodobieństwa losowej wielkości  $\chi^2$  musi zależeć tylko od jednego parametru, a mianowicie od liczby stopni swobody  $k$ . Jeżeli nie wszystkie z  $m$  wielkości losowych są niezależne, to liczba stopni swobody będzie mniejsza od  $k$  o liczbę dodatkowych węzi określających związki między zależnymi losowymi zmiennymi  $x_i$ . Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa chi-kwadrat  $\chi^2$  określa wzór



$$p(\chi^2) = \frac{1}{2^{k/2} (k/2 - 1)!} (\chi^2)^{(k/2-1)} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right), \quad 0 < \chi^2 < \infty \quad (22)$$

Łatwo udowodnić, że

$$\overline{\chi^2} = \int_0^{\infty} \chi^2 p(\chi^2) d(\chi^2) = k, \quad (23)$$

$$D_{\chi^2} = \int_0^{\infty} (\chi^2 - \overline{\chi^2})^2 p(\chi^2) d(\chi^2) = 2k. \quad (24)$$

W zastosowaniach ważną rolę odgrywa funkcja

$$P(\chi^2 < \chi_*^2) = \int_0^{\chi_*^2} p(\chi^2) d(\chi^2), \quad (25)$$

wartości której są przedstawione prawie we wszystkich poradnikach po matematyce i statystyce.

## TESTOWANIE HIPOTEZ STATYSTYCZNYCH. TEST $\chi^2$

Celem wielu eksperymentów jest ustalenie rozkładu statystycznego mierzonej losowej wielkości fizycznej. Na przykład w fizyce jądrowej to może być rozkład rozpraszania kąтового neutronów na jądrach określonego pierwiastka. Znalezienie dokładnego rozkładu losowej wielkości ( $x$ ) nie jest możliwe, ponieważ to wymaga przeprowadzenia nieskończonej liczby pomiarów dla tego żeby wiedzieć cały zbiór możliwych próbek  $\{x_1, x_2, \dots\}$ . A zatem doświadczenie nie udowadnia słuszność hipotetycznego rozkładu a tylko daje możliwość wywnioskować, że proponowany hipotetyczny rozkład nie jest sprzeczny z danymi eksperymentu.

Zwykle przed przeprowadzeniem doświadczenia, opierając na dane teorii albo poprzednie eksperymenty, już możemy wysunąć jedną albo kilku hipotez określających, że interesujące nas zjawisko rządzone jest przez dany rozkład. Ponieważ mierzona losowa wielkość zawiera błędy, to nawet, jeżeli rozkład tej wielkości został wybrany prawidłowo, zawsze będą obserwowane odchylenia doświadczalnych danych od danych wyliczonych za pomocą hipotetycznego rozkładu. Powstaje pytanie – czy obserwowane odchylenia doświadczalnych danych od odpowiednich wielkości, wynikających z wysuniętego rozkładu są przypadkowe (losowe), czy te odchylenia są systematyczne, co wskazuje na to że wybrany rozkład jest błędny.

Kryterium zgody nosi nazwę kryteria weryfikacji hipotezy o wnioskowanym rozkładzie. Za pomocą odpowiedniego kryterium, korzystając z tak zwanego prawdopodobieństwa ufności, można upewnić się czy zgadza się hipotetyczny rozkład z danymi doświadczalnymi czy nie zgadza się. Na praktyce często stosuje się kryterium zgody  $\chi^2$ . Rozważmy ten kryterium szczegółowo.

Załóżmy, że musimy sprawdzić hipotezę dotyczącą rozkładu  $p(x)$  wielkości losowej  $X$ . Rozważmy doświadczenie w którym wykonano  $(n)$  niezależnych pomiarów  $X$ . Podzielmy cały zakres zmian  $X$  na  $m$  interwałów i policzmy ilości  $n_i$  obserwacji  $X$  znajdujących się w każdym  $i$  – tym interwale. Ponieważ zakładamy, że rozkład teoretyczny  $p(x)$  jest wiadomy, możemy policzyć teoretyczne wartości liczby obserwacji  $X$  w  $i$  – tym interwale -  $np_i$ , gdzie  $p_i$  jest prawdopodobieństwo znalezienia losowej wielkości  $X$  w  $i$  – tym interwale. Jeżeli różnica między  $n_i$  oraz  $np_i$  jest duża, musimy odrzucić wysuniętą hipotezę. Kryterium  $\chi^2$  daje właśnie możliwość liczbowo wyrazić stopień zgody między teoretycznym rozkładem i doświadczalnymi danymi.

Kryterium  $\chi^2$  opera się na fakcie, że gdy  $n \rightarrow \infty$ , to rozkład każdej losowej wielkości  $n_i$  jest rozkładem Gaussa (centralne twierdzenie graniczne), a rozkład wielkości

$$\chi^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} . \quad (26)$$

jest rozkładem  $\chi^2$  o  $k = (m - 1)$  stopniach swobody. W praktyce jest wystarczającym aby wszystkie  $n_i$  były większe niż 5. Jeżeli w  $n_i < 5$ , to zwiększają interwały. Przy tym interwały mogą nie być nawet równe sobie.

Kryterium  $\chi^2$  stosują w następujący sposób. Najpierw liczymy wielkość

$$\chi_*^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} . \quad (27)$$

Potem wybierając prawdopodobieństwo  $p$  ufności (albo poziom  $\alpha = 1 - p$  istotności hipotezy) znajdujemy za pomocą tabeli 3, przedstawionej na końcu danej instrukcji, wartość  $\chi_{\alpha,k}^2$ . Tu  $k$  jest liczbą stopni swobody,  $k = m - 1 - t$  a  $t$  – liczba dodatkowych węzi nałożonych na losowe

zmienne  $x_i$ . Jeżeli dla określonego  $\alpha$  otrzymujemy, że  $\chi_*^2 > \chi_{\alpha,k}^2$ , to stwierdzamy że teoria nie jest zgodna z eksperymentem. Natomiast, jeżeli  $\chi_*^2 < \chi_{\alpha,k}^2$ , to mówimy, że zaproponowany rozkład zgadza się z doświadczeniem. Z tabeli możemy znaleźć również prawdopodobieństwo ufności  $p$ , przy którym  $\chi_*^2 < \chi_k^2$ .

Rozważmy przykład zastosowania kryteria  $\chi^2$ . W próbie o liczebności  $n = 200$  ilości  $n_i$  obserwacji wielkości losowej  $X$  w  $m = 7$  wybranych interwałach wynoszą

Tabela 1. Doświadczalne  $n_k$  oraz teoretyczny  $np_k$  ilości obserwacji wielkości losowej  $X$

k	0	1	2	3	4	5	6	Razem
$n_k$	109	65	22	3	1	0	0	200
$m_k = np_k$	108.7	66.3	20.2	4.1	0.6	0.07	0.01	200

Chcemy sprawdzić hipotezę, że otrzymane wielkości spełniają rozkład Poissona

$$p(k) = p_k = \frac{(\bar{k})^k}{k!} e^{-\bar{k}}. \quad (28)$$

Zgodnie z (28) musimy najpierw znaleźć  $\bar{k}$

$$\bar{k} = \frac{\sum_{k=0}^6 k \cdot n_k}{\sum_{k=0}^6 n_k} = \frac{0 \cdot 109 + 1 \cdot 65 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1}{200} = \frac{122}{200} = 0.61. \quad (29)$$

Wtedy dla teoretycznych wielkości  $m_k = np_k$  otrzymujemy wzór

$$m_k = np_k = 200 \cdot \frac{(0.61)^k}{k!} e^{-0.61}. \quad (30)$$

Dane  $m_k$  są przedstawione w tabeli 1. Ponieważ oczekiwane wielkości  $m_k = np_k$  dla  $k > 2$  są małe, zgrupujemy ostatnie cztery interwały w jedyny interwał. Wtedy zamiast tabeli 1 będziemy mieli tabel 2.

Dla sprawdzania wysuniętej hipotezy, zgodnie z (27), musimy znaleźć  $\chi_*^2$

$$\chi_*^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(0.3)^2}{108.7} + \frac{(-1.3)^2}{66.3} + \frac{(1.8)^2}{20.2} + \frac{(-0.8)^2}{4.8} = 0.32. \quad (31)$$

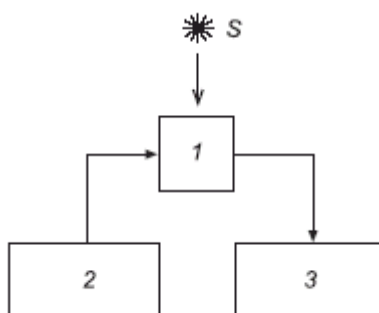
Tabel 2. Doświadczalne  $n_k$  oraz teoretyczny  $np_k$  ilości obserwacji wielkości losowej  $X$

k	0	1	2	$\geq 3$
$n_k$	109	65	22	4
$m_k = np_k$	108.7	66.3	20.2	4.8

Dla oszacowania  $\bar{k}$  stosowaliśmy jeden warunek (29). A zatem liczba stopni swobody wynosi  $k = 4 - 1 - 1 = 2$ , a wielkość  $\chi_*^2$  musi mieć rozkład  $\chi_2^2$ . Sprawdźmy teraz czy otrzymana wartość  $\chi_*^2 = 0.32$  jest zgodna z hipotezą o rozkładzie Poissona danych doświadczalnych. Z tabeli 3 (przedstawionej na końcu danej instrukcji) znajdujemy, że prawdopodobieństwu ufności  $p = 0.95$  (albo poziomowi  $\alpha = 1 - p = 0.05$  istotności hipotezy) odpowiada  $\chi_{0.05;2}^2 = 5.991$ , czyli wartość  $\chi_*^2$  musi znajdować się w granicach od  $\chi_*^2 = 0$  do  $\chi_*^2 = 6$ . Ponieważ znaleziona wartość  $\chi_*^2 = 0.32$  znajduje się w tym zakresie, hipoteza testowana o rozkładzie Poissona danych doświadczalnych zostaje zaakceptowana. Jeżeliby otrzymaliśmy, że  $\chi_*^2 > 6$  wtedy testowaną hipotezę należałoby odrzucić.

### PREBIEG ĆWICZENIA

Schemat urządzenia pomiarowego jest pokazany na rys.2. Urządzenie zawiera detektor promieniowania (1), źródło wysokiego napięcia (2) i licznika (3). Detektor rejestruje promieniowania jonizujące od źródła (s). Jako detektor można stosować licznik Giegera-Müllera (GM) albo scyntylicyjny licznik.



Rys.2. Schemat ćwiczenia.

Celem doświadczalnej części niniejszego ćwiczenia jest – rejestracja intensywności promieniowania jonizującego w różnych interwałach czasowych oraz sprawdzanie i wybór jednej z dwóch hipotez: hipoteza 1 - otrzymane dane doświadczalne są zgodne z rozkładem Poissona; hipoteza 2 - otrzymane dane doświadczalne są zgodne z rozkładem Gaussa.

Zadanie 1. Napięcie zasilania licznika należy ustawić na wcześniej wyznaczony punkt pracy. Podstawę czasu należy obrać małą tak aby licznik rejestrował w średnim od 2 do 4 impulsów. Pomiar polega na wielokrotnym notowaniu liczby zliczeń na jednostkę czasu rejestrowanych przez detektor. Należy dokonać około 1500 rejestracji takich zliczeń.

Zadanie 2. Po wykonaniu pierwszego zadania należy podstawę czasu obrać tak aby licznik rejestrował w średnim od 15 do 25 impulsów. Dla wybranego interwału czasowego wykonać około 500 rejestracji zliczeń licznika.

Zadanie 3. Wyniki doświadczalne przedstawić w postaci dwóch histogramów  $p_k(k)$ , gdzie  $p_k$  jest częstością występowania  $k$  impulsów w jednostce czasu. Dla obu wykresów należy zweryfikować hipotezę, czy przedstawione rozkłady są rozkładem Poissona czy Gaussa. Ukazać statystyczną istotność otrzymanych wyników.

Na wykresach c doświadczalnymi histogramami przedstawić teoretyczne histogramy. Doświadczalne i teoretyczne histogramy muszą być unormowane na całkowitą liczbę pomiarów. Korzystając z histogramy odpowiadającej zadaniu 2 sprawdzić, że około 68% pomiarów nie różni się od wartości średniej  $\bar{k}$  więcej niż na  $\sqrt{\bar{k}}$ .

### SPRAWOZDANIE Z ĆWICZENIA MUSI ZAWIERAĆ:

1. Krótki teoretyczny opis podstawowych pojęć.
2. Cel prowadzonego badania.
3. Opis doświadczalnej aparatury oraz metody pomiarowej;
4. Wykresy i tabeli wyników pomiarowych;
5. Wnioski – przeprowadzić dyskusję otrzymanych wyników.
6. Spis wykorzystanej literatury.

### WYMAGANIA DO KOŁOKWIUM

1. Określenie wartości oczekiwania (średniej), wariancji, odchylenia średniego (fluktuacji względnej i bezwzględnej).

2. Rozkład Poissona (wyprowadzenie rozkładu). Wariancja rozkładu Poissona (wyprowadzenie). Przejście rozkładu Poissona w rozkład Gaussa (warunki, wyprowadzenie).
3. Centralne twierdzenie graniczne a rozkład Gaussa.
4. Względna i bezwzględna fluktuacja dla rozkładu Gaussa.
5. Rozkład  $\chi^2$ . Testowanie hipotez za pomocą kryterium  $\chi^2_{\alpha,k}$ .

#### LITERATURA

1. T.Hilczer, Ćwiczenia z pracowni jądrowej, UAM, Poznań, 1975.
2. Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, Pod red. F.Kaczmarka, PWN, Warszawa, 1982.
3. J. Araminowicz, K. Małuszyńska, M. Przytuła, "Laboratorium fizyki jądrowej" PWN Warszawa 1984
4. J. R. Taylor, "Wstęp do analizy błęd pomiarowego" PWN Warszawa 1995
5. J. L. Kacperski, "Opracowanie danych pomiarowych" Wyd. Uniwersytetu Łódzkiego 1997

Tabela 3. Wartości  $\chi^2_{\alpha,k}$  dla różnych  $P_{\chi^2}$  w zależności od liczby stopni swobody  $k$  i poziomu istotności hipotezy  $\alpha = 1 - p$  (pierwszy górny wiersz).

$k$	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	$k$
1	0,000157	0,00628	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	1
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	2
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,605	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	3
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	4
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	5
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	6
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	7
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	8
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	9
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	10
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	11
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	12
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	13
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	14
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	15
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	16
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	17
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	18
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	19
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	20
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	21
22	8,542	10,600	12,388	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	22
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	23
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	24
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	25
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	26
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	27
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	28
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	29
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	30