

## Gaz swobodnych elektronów.

1. (cząstka w pudle potencjału)
  - a) Przyjmując warunek  $\psi(x, y, z) = 0$  na powierzchni sześcianu o boku  $L$ , znaleźć wszystkie funkcje falowe pierwszych trzech poziomów energetycznych.
  - b) Podać wyrażenie na energię każdego z tych poziomów.
  - c) Jaka jest degeneracja każdego z tych poziomów?
2. Prawdopodobieństwo obsadzenia stanu o energii  $E$  w gazie elektronowym będącym w równowadze termicznej wyraża się funkcją Fermiego-Diraca  $f(E) = 1/(\exp[(E - \mu)/k_B T] + 1)$ , gdzie  $\mu = \mu(T)$ .
  - a) Opisz postać funkcji  $f(E)$  w temperaturze zera bezwzględnego dla  $E > \mu$ ,  $E = \mu$ ,  $E < \mu$
  - b) Znajdź przybliżenie rozkładu Fermiego-Diraca dla wysokich energii, czyli gdy  $E - \mu \gg k_B T$ .
3. Wiedząc, że gęstość stanów elektronowych w metalu wynosi

$$g(E) = \frac{V}{2\pi} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E}$$

obliczyć energię i temperaturę Fermiego w  $0K$  dla litu.

$$\rho_{Li} = 0.534g/cm^3, M_{Li} = 6.939g/mol.$$

4. Znając całkę

$$\int_0^\infty E^p f(E) dE = \frac{1}{p+1} E^{p+1} + \frac{\pi}{6} p E_F^{p-1} (kT)^2,$$

wykaż, że

$$E_F = E_F^{(0)} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F^{(0)}} \right)^2 \right].$$

Oszacuj względne przesunięcie poziomu Fermiego dla litu w temperaturze pokojowej.

5. Oblicz średnią energię kinetyczną dla trójwymiarowego gazu  $N$  elektronów w temperaturze  $0K$ .

6. Wyznacz przybliżoną zależność temperaturową potencjału chemicznego dla gazu elektronów swobodnych o stałej koncentracji.

Wskazówka:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{y} dy}{1 + \exp(y - x)} \approx \frac{2}{3} x^{3/2} \frac{1 + \pi^2}{8x^2} \quad \text{dla } x \geq 1.5.$$

7. Wyprowadź wzór na funkcję gęstości stanów dla trójwymiarowego gazu elektronów swobodnych.
8. Wyprowadź wzory na energię Fermiego oraz energię wewnętrzną w temperaturze  $0K$  dla trój- i dwuwymiarowego gazu elektronowego.
9. (przejście Motta) Jeżeli ciało stałe traci właściwości metaliczne gdy  $n^{-1/3} \gg 4a_0$ , gdzie  $a_0 = 4\pi\hbar^2\varepsilon_0/(me^2)$ , ile razy musiałyby zmienić się koncentracja elektronów przewodnictwa w licie ( $n = 4.62 \cdot 10^{22} \text{cm}^{-3}$ ) aby zaszło to zjawisko. Przyjąć spełnienie nierówności gdy jej strony różnią się co najmniej 20 razy.

### Struktura pasmowa ciał stałych.

1. Udowodnić twierdzenie Blocha w przypadku jednowymiarowym, tzn. pokazać, że rozwiązania równania Schrödingera dla potencjału periodycznego mają postać  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})$ , gdzie  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  jest funkcją o takiej samej periodyczności jak periodyczność potencjału (kryształu):  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x} + \mathbf{a})$ .
2. (Sieć odwrotna) Wektor sieci odwrotnej dany jest wzorem:  
 $\mathbf{G} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + v_3\mathbf{b}_3$  ( $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Z}$ ), gdzie

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}, \mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}, \mathbf{b}_3 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}.$$

- a) Udowodnij warunek ortogonalności  $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_j = 2\pi\delta_{ij}$ .
- b) Jeżeli  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  są wektorami translacji sieci a koncentrację elektronów w kryształach przedstawimy rozkładem Fouriera w sieci odwrotnej  $n(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G}\mathbf{r})$  pokaż, że posiada ona symetrię translacyjną taką jak symetria sieci.
- c) Warunek Bragga w sieci odwrotnej ma postać  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{G}$ . Przekształć ten warunek do postaci  $2\mathbf{k} \circ \mathbf{G} = G^2$ , zakładając zachowanie energii rozproszonego fotonu.

3. (Własności funkcji Blocha)

- a) Udowodnij ortogonalność funkcji Blocha o różnych wektorach falowych. Wykorzystaj zależność:

$$\int_{\Omega} e^{i\mathbf{g}\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \delta_{0\mathbf{g}}$$

- b) Pokaż, że funkcje Blocha, których wektory falowe różnią się o wektor sieci odwrotnej są jednakowe.

4. Przekształć równanie Schrödingera dla cząstki w potencjale periodycznym do reprezentacji w sieci odwrotnej.

5. Wyznaczyć przerwę energetyczną w modelu prawie swobodnych elektronów.

6. (masa efektywna) W teoriach struktury pasmowej definiuje się masę efektywną jako

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E(k)}{dk^2}.$$

- a) Wykazać, że dla elektronu swobodnego masa efektywna jest równa masie rzeczywistej.  
b) Korzystając z relacji dyspersyjnej tzn. zależności  $E(k)$  wyznaczyć w przybliżeniu stosunek  $m^*/m$ .

7. (model Kroniga-Penney'a) Rozważ cząstkę w jednym wymiarze w potencjale periodycznym równym  $V_0$  dla  $ns + nd < x < (n+1)s + nd$  i równym 0 dla  $(n+1)s + nd < x < (n+1)s + (n+1)d$ , gdzie  $n \in \mathbb{Z}$ . Znajdź warunek określający energię elektronu i wykaż graficznie, że istnieją zakresy energii, którym nie odpowiadają żadne rzeczywiste wektory falowe.

### Półprzewodniki.

1. Wyznacz zależność koncentracji samoistnej krzemu od temperatury w zakresie od 200 do 500K, jeżeli przerwę energetyczną można w tym zakresie wyrazić wzorem  $W_g = 1.204 - 2.8 \cdot 10^{-4}T$  [eV].

Masy efektywne:  $m_c = 1.18m_e$ ,  $m_v = 0.81m_e$

2. Wyprowadź ogólny wzór na współczynnik temperaturowy koncentracji samoistnej, jest on pochodną logarytmiczną funkcji  $n_i(T)$  i określa względną zmianę koncentracji samoistnej wywołaną zmianą temperatury o  $1K$ :

$$\frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{dT} = \frac{d}{dT}(\ln n_i).$$

Założyć, że przerwa energetyczna półprzewodnika zmienia się z temperaturą według wzoru  $W_g = W_{g0} + \alpha T$ .

Wyznacz wartość tego współczynnika dla krzemu w temperaturze pokojowej.

3. W próbce półprzewodnika w stanie ustalonym występuje koncentracja nadmiarowa  $\Delta n$ . W chwili  $t = 0$  wyłączone zostało źródło promieniowania wywołującego regenerację tych nośników. Wyznacz zależność koncentracji nadmiarowej od czasu, jeśli jest ona opisana równaniem

$$\frac{d(\Delta n)}{dt} = g - \frac{\Delta n}{\tau},$$

gdzie  $\tau$  - czas życia nośników nadmiarowych,  $g$  - szybkość regeneracji.

Ile razy maleje koncentracja nośników nadmiarowych po czasie  $\tau$ ?

4. Wyprowadź wzory na koncentrację elektronów w paśmie przewodnictwa oraz na poziom Fermiego w półprzewodniku samoistnym. Oszacuj koncentrację elektronów w czystym germanie w temperaturze  $T = 300K$ . Przerwa energetyczna w  $Ge$  wynosi  $0.78eV$ .

Potrzebna będzie całka:  $\int_0^\infty \exp(-x)\sqrt{x}dx = \sqrt{\pi}/2$ .

5. Określ koncentrację elektronów przewodnictwa w  $Ge$ , zawierającym domieszki donorowe o koncentracji  $N_d = 10^{22}/m^3$ , jeżeli wiadomo, że poziom donorowy znajduje się w odległości  $0,02eV$  od dna pasma przewodnictwa. Przyjmij  $T = 50K$ .
6. Potencjał kontaktowy złącza  $n - p$  (względne przesunięcie pasm przewodnictwa) określamy wzorem:

$$\phi = \frac{kT}{e} \ln \frac{N_a N_d}{n_i^2},$$

gdzie  $n_i$  jest koncentracją elektronów w paśmie przewodnictwa czystego materiału stanowiącego złącze. Oszacuj potencjał kontaktowy dla  $Ge$  w temperaturze pokojowej.

$N_a = 4.1 \cdot 10^{24}/m^3$ ,  $N_d = 1.4 \cdot 10^{21}/m^3$ .

7. Ruchliwość elektronów ( $\mu = e\tau/m^*$ ) w pewnym kryształe wynosi  $5 \cdot 10^4 \text{cm}^2/(\text{Vs})$ . Przyjmując, że masa efektywna elektronu jest równa masie elektronu swobodnego obliczyć czas relaksacji. Sprawdzić jednostki.

### Drgania sieci i fonony.

1. Wyznacz częstość kołową drgań sieci jednowymiarowej, składającej się z jednakowych atomów leżących w odległości  $a$  od siebie.
2. Analogicznie rozważyć sieć złożoną z dwóch rodzajów atomów rozmieszczonych naprzemiennie.
3. Oblicz częstość kołową drgań łańcucha monoatomowego z uwzględnieniem oddziaływań z drugimi sąsiadami.  $\phi_1, \phi_2$  - stałe sprężystości.
4. Wyznacz częstość kołową drgań sieci kwadratowej o stałej sieci  $a$  w przybliżeniu najbliższych sąsiadów.