Sieci neuronowe

1. Logika, funkcje logiczne, preceptron.

1. (Logika) Udowodnij prawa de Morgana, prawo pochłaniania $p \Rightarrow (p \vee \neg q)$, prawo wyłączonego środka $p \vee \neg p$ oraz prawo sprzeczności $\neg(p \wedge p)$.

2. Wyraź funkcję sieci Φ w terminach funkcji podstawowych $f_1, ..., f_4$ i wag $\alpha_1, ..., \alpha_5$.

3. Zaprojektuj sieci obliczające funkcje:

   (a) $f_a(x) = f_4(f_3[w_3 f_2(w_2 f_1(x)) + w_4 f_1(x)])$

   (b) $f_b(x) = 2\sin(e^x + y + 1) + 3\cos(e^x)$

4. Sprawdź poprawność działania jednostek McCullocha-Pittsa obliczających funkcje logiczne AND, OR, $x_1 AND \neg x_2$, NOR i NOT.

5. (Reprezentacja graficzna funkcji logicznych) Oblicz ilość wierzchołków n-wymiarowego hipersześcianu oraz ilość możliwych funcji Boole'a n-zmiennych.

6. (Dekodery wektorów binarnych) Zaprojektuj sieć jednostek McCullocha-Pittsa obliczającą funkcję logiczną taką, że:

   $(1, 0, 0, 1) \to 1$, $(0, 1, 1, 1) \to 1$,

   oraz wynoszącą zero dla pozostałych wektorów. Sprawdź poprawność działania tej sieci.

7. Pokaż, że funkcję OR można przedstawić jako złożenie funkcji AND i NOT. Pokaż, że funkcję AND można przedstawić jako złożenie funkcji OR i NOT.

8. Znajdź optymalną ilość stanów, którą należy użyć do przekazywania sygnału, zakładając stałość kosztu. Zależność liczby wartości, które można reprezentować od ilości stanów dana jest funkcją $f(b) = b^{\kappa/b}$ (κ jest kosztem).

9. Pokazać, że poniższa sieć rekurencyjna (rysunek) zamienia sekwencję 11 na 10.

10. Narysuj graf automatu skończonego danego tabelami przejść i sygnałów wyjściowych.

2. Algorytm uczenia perceptronu i sieci wielowarstwowe.

1. Podaj równania ogólne prostej rozdzielającej zbiory punktów $P = \{(3,4),(1,1)\}$, $N = \{(-1,0),(-1,3)\}$. Czy jest to absolutna liniowa separowalność. Sprawdź, że nie każda prosta rozdzielająca punkty daje absolutną liniową separowalność. Narysuj perceptrony realizujące te podziały.

2. (Algorytm uczenia perceptronu) Zbiór N składa się z punktów $x_1 = (0,1)$ i $x_2 = (-2,-1)$, zbiór P to punkt $x_3 = (1,-1)$.

   (a) Używając algorytmu uczenia perceptronu dobrać wagi rozdzielające liniowo te zbiory zaczynając od wektora $w_1 = [1,2]$. Proces uczenia zilustruj odpowiednimi rysunkami.

   (b) Przeprowadź takie samo uczenie aktualizując wagi zgodnie ze wzorem $\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t + \frac{-\mathbf{w}_t\mathbf{x}+\varepsilon}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x}$

3. Inne algorytmy:

   (a) (reguła Hebba, bez nauczyciela, sygnałem uczącym jest wyjście neuronu) Aktualizuje wagi zgodnie ze wzorem $\Delta\mathbf{w}_i = cf(\mathbf{w}_i\mathbf{x})\mathbf{x}$ (dodatnia wartość korekcji powoduje wzrost wagi a więc silniejszą reakcję neuronu). Przeprowadź uczenie neuronu (zaczynając od wag początkowych $\mathbf{w} = [1,-1,0,0.5]$) wektorami $\mathbf{x_1} = [1,-2,1.5,0]$, $\mathbf{x_2} = [1,-0.5,-2,-1.5]$, $\mathbf{x_3} = [0,1,-1,1.5]$. Stała uczenia $c = 1$, funkcja aktywacji $f(x) = sgn(x)$, funkcja scalająca to sumowanie.

   (b) (reguła delta, uczenie nadzorowane) $\Delta\mathbf{w}_i = c(d_i - f(\mathbf{w}_i\mathbf{x}))f'(\mathbf{w}_i\mathbf{x})\mathbf{x}$. Sygnał nauczyciela $d_i = 0.974$, stała uczenia $c = 0.1$.
   Funkcja aktywacji: $f(x) = \frac{2}{1+\exp(-x)} - 1$.

4. Przeanalizuj działanie dwóch sieci 3-warstwowych obliczających XOR.

3. Algorytm propagacji wstecznej.

1. (Sigmoid jako funkcja aktywacji)

   (a) Pokazać, że $s_c = 1/(1+e^{-cx})$ nie może przyjmować wartości należących do zbioru $(-\infty,0] \cup [1,+\infty)$.

   (b) Pokazać, że dla $c \to \infty$ sigmoid staje się funkcją schodkową.

   (c) Wykazać, że pochodna sigmoidu jest równa $s(x)(1-s(x))$.

   (d) Udowodnić symetrię $S(-x) = -S(x)$ sigmoidu symetrycznego $S(x) = 2s(x) - 1$ oraz sprawdzić, że jest to $\tanh(x/2)$.

2. (B-diagram) Narysuj sieci z wagami dla złożenia i dodawania funkcji. Sprawdź poprawność uzyskanych pochodnych.

3. (B-diagram) Narysuj B-diagram dla funkcji $\sin(xy) + \cos(x)$.

4. (B-diagram) Narysuj B-diagram dla funkcji $x \cdot \exp(2x^2 + 3y)$.

5. (Algorytm uczenia) Znajdź wyrażenia na korekcje wag sieci warstwowej jeżeli użyty zostanie sigmoid symetryczny.

5. Logika rozmyta.

1. Dane są funkcje członkostwa zbiorów rozmytych `niski`, `średni` i `wysoki`. Wyznacz graficznie funkcje członkostwa dla zbiorów:

   (a) `niski`$\cap$`wysoki`,

   (b) (`niski`$\cup$`średni`)$\setminus$`wysoki` (rysunek).

2. Niech dane będą zbiory rozmyte $A = 0.5/1 + 0.9/2 + 1/5$ i $B = 0.7/2 + 0.9/3 + 0.1/4$. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Oblicz:

   - $A \cup B$,
   - $A \cap B$,
   - $\bar{A}$,
   - $\bar{A} \cap A$,
   - $\bar{A} \cup A$.

3. Pokaż, że funkcja maksimum spełnia aksjomaty rozmytego operatora OR.

4. Pokaż, że funkcja minimum spełnia aksjomaty rozmytego operatora AND.

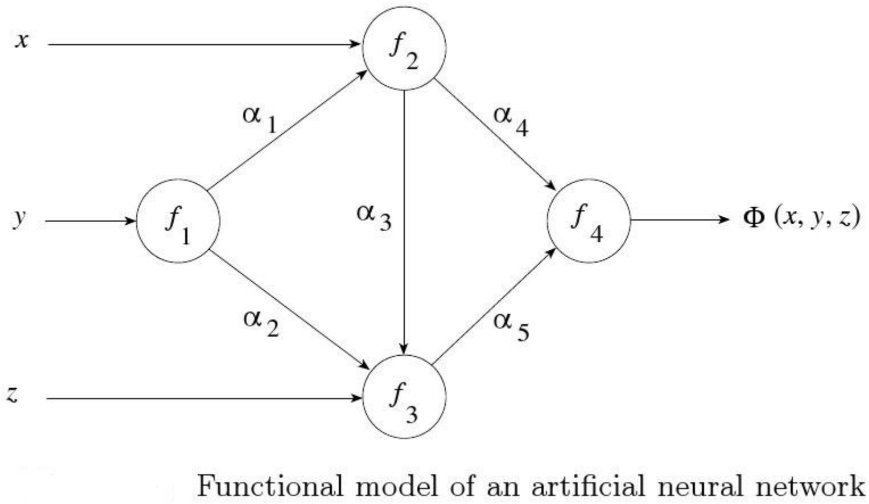


Figure 1: Zadanie 1.2

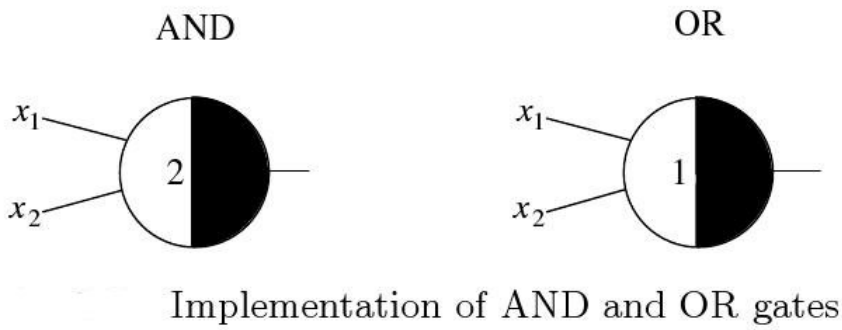


Figure 2: Zadanie 1.4

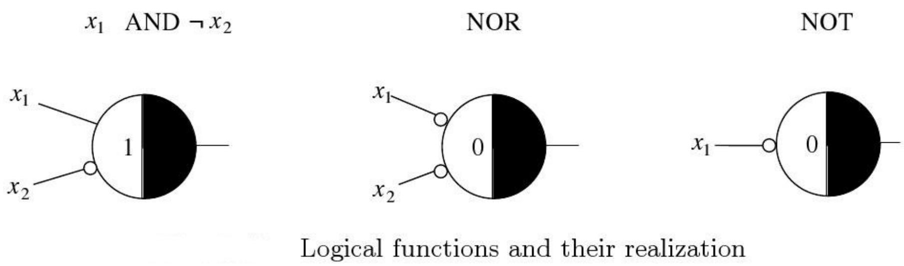
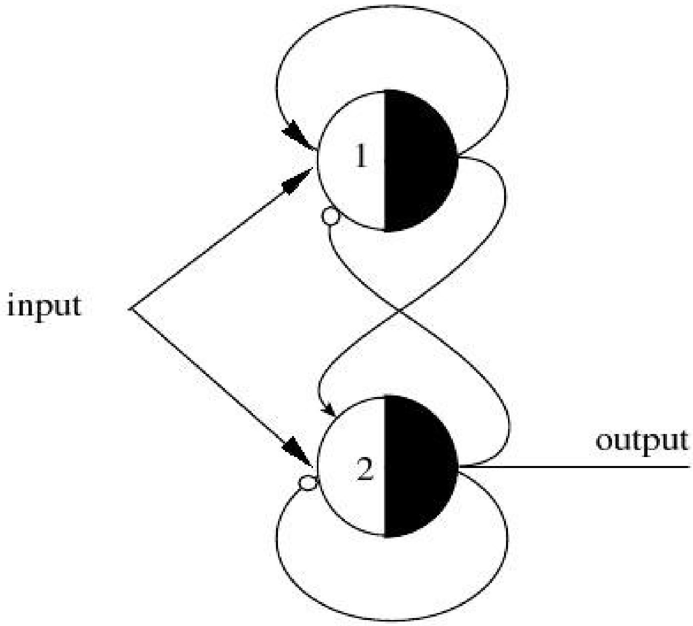


Figure 3: Zadanie 1.4



Network for a binary scaler

Figure 4: Zadanie 1.9

state transitions

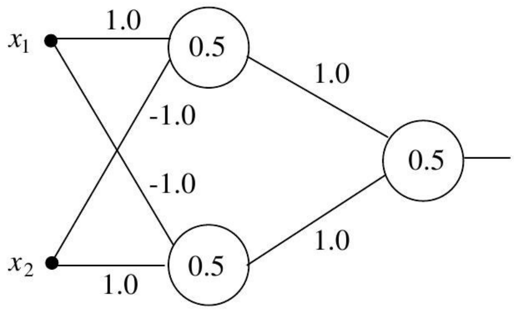
input	state	Q_0	Q_1
	0	Q_0	Q_0
	1	Q_1	Q_1

output table

input	state	Q_0	Q_1
	0	0	1
	1	0	1

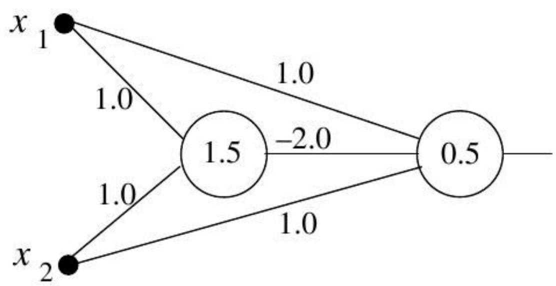
State tables for a binary delay

Figure 5: Zadanie 1.10



A three-layered network for the computation of XOR

Figure 6: Zadanie 2.4



Two unit network for the computation of XOR

Figure 7: Zadanie 2.4

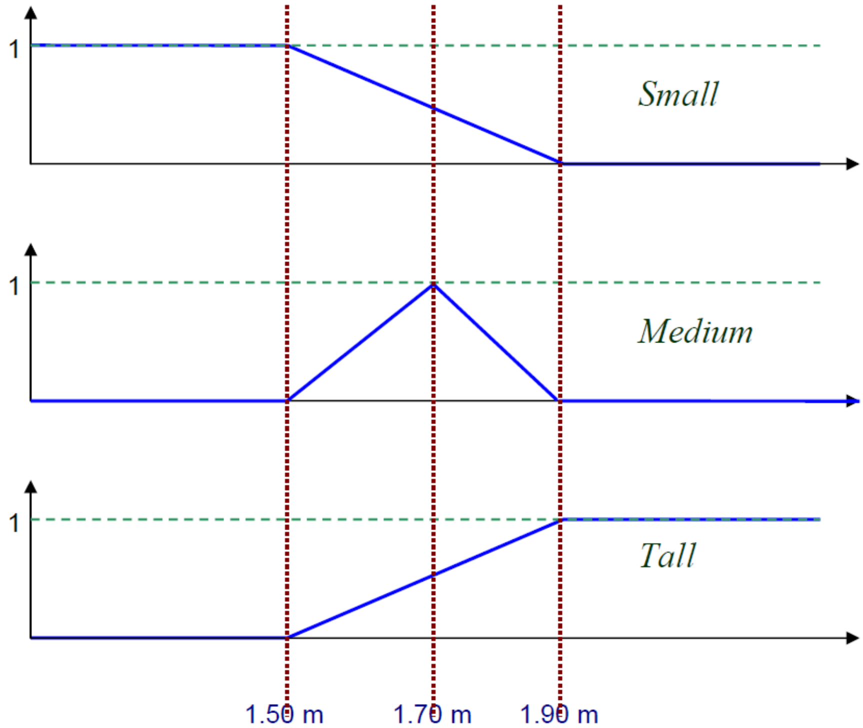


Figure 8: Zadanie 5.1