Funkcje Bessela - własności.

1. Dla funkcji Bessela $J_n(z)$; $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, wyprowadzić związki:
   $J_n'(z) + \frac{n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z)$,
   $J_n'(z) - \frac{n}{z} J_n(z) = -J_{n+1}(z)$
   i otrzymać z nich związki rekurencyjne ($n \in \mathbb{N}$):
   $J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z)$,
   $J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n'(z)$.

2. Sprawdzić, że

$$w(z,t) = \exp\left[\frac{z}{2}(t - 1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [t^n + (-1)^n t^{-n}] J_n(z).$$

3. Pokazać, że $J_0'(x) = -J_1(x)$ i $[xJ_1(x)]' = xJ_0(x)$.

4. Wykazać, że jeżeli α_i jest dowolnym miejscem zerowym J_x, to
   $\int_0^{\alpha_i} J_1(x)dx = 1$.

5. Wykaż, że $\int J_0(x)J_1(x)dx = \frac{1}{2}J_0^2(x) + C$.

6. Wykaż, że $\int_0^1 axJ_0(ax)dx = J_1(a)$.

7. Wykaż, że $\int x^3 J_0(x)dx = x(x^2 - 4)J_1(x) + 2x^2 J_0(x) + C$.

8. Obliczyć wartości $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$, $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$.

9. Wykaż, że maksima i minima funkcji $J_n(z)$ występują dla
   (a) $z = \frac{nJ_n(z)}{J_{n+1}(z)}$
   (b) $z = \frac{nJ_n(z)}{J_{n-1}(z)}$
   (c) $J_{n-1}(z) = J_{n+1}(z)$.

10. Wykaż, że jeżeli θ jest dowolnym zerem funkcji $J_n(z)$, to
    (a) $J_{n-1}(\theta) = -J_{n+1}(\theta)$, (b) $2J_{n+1}'(\theta) + J_{n+2}(\theta) = 0$,
    (c) $J_n'(\theta) = J_{n-1}(\theta)$, (d) $J_n'(\theta) + J_{n+1}(\theta) = 0$,
    (e) $4J_n''(\theta) = J_{n-2}(\theta) + J_{n+2}(\theta)$.

Funkcje Bessela - równania różniczkowe.

1. Wyznacz rozwiązanie r. r.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} + 4u = 0,$$

spełniające warunki $u'(0) = 0$, $u(0) = 10$.

2. Wyznaczyć współczynniki A_n w rozwinięciu w szereg Fouriera-Bessela funkcji $f(r) = U_0 r$ w przedziale $0 < r < a$:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right),$$

gdzie γ_n są kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równania $J_1(\gamma) = 0$.

3. Wyznaczyć ogólne rozwiązania r. r.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - a^2 e^{2ti} y = 0 \ (wsk.\ x = ae^{ti}),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{x}\frac{dy}{dx} + \left(k^2 + \frac{1}{x^2}\right) y = 0 \ (wsk.\ y = x^{-1}V(x)),$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}y = 0 \ (wsk.\ x = t^2),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + 16x^3 y = 0 \ (wsk.\ t = x^4),$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \left(9x^2 + \frac{1}{4}\right) y = 0 \ (wsk.\ y = x^{-1/2}V(x)).$$

4. Wyznaczyć rozwiązanie r. r.

$$y'' + \frac{1}{x}y' - 9y = 0$$

dla $2 < x < 3$ takie, że $y(2) = 2,\ y(3) = 3$.

5. Wyznaczyć ogólne rozwiązanie r. r.

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{y}{z} = 0 \ (wsk.\ y = xv(x),\ x = z^{1/2}).$$

6. Wyznaczyć rozwiązanie r. r.

$$x^2y'' + xy' - (9x^2 + 1)y = 0$$

spełniające warunki $y(0) = 0$, $y(1) = 5$.

7. Wyznaczyć ogólne rozwiązanie r. r. $y'' - xy = 0$ (wsk. $y = t^{1/3}v(t)$, $t = x^{3/2}$).

8. Wyznaczyć ogólne rozwiązanie r. r. (wsk. $y = x^{-3/2}v(x)$).

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4}{x}\frac{dy}{dx} - \left(4k^2 + \frac{27}{4x^2}\right)y = 0.$$

Funkcje Bessela - całki.

1. Obliczyć całki
$$\int_0^{2\pi} e^{iz\sin\theta} d\theta \quad \text{i} \quad \int_0^{2\pi} e^{iz\cos\theta} d\theta,$$
rozwijając funkcje podcałkowe w szereg funkcji Bessela.

2. Obliczyć całki
$$\int_0^{\pi} \cos(z\sin\theta) d\theta \quad \text{i} \quad \int_0^{\pi} \sin(z\sin\theta) d\theta,$$
użyć relacji $e^{iz\sin\theta} = \cos(z\sin\theta) + i\sin(z\sin\theta)$.

3. Obliczyć całkę
$$\int_0^{2\pi} e^{it\cos(\theta-\alpha)} \sin m\theta,$$
użyć relacji $e^{iz\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(z)\cos n\theta$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$, $n \geq 1$.

4. Wiedząc, że
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - b\cos\theta} d\theta = \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-b^2}}\right)^n, \ |b| < 1,$$
oblicz całkę
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{ib\cos\theta}}{1 - b\cos\theta} d\theta.$$

5. Obliczyć całkę $I = \int_0^a J_0(kz)(1 - z^2/a^2)^{n+1} z dz$, gdzie $n \in \mathbb{Z}_+$.
Podstawić $z = a\sin\theta$ i skorzystać ze wzoru redukcyjnego
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{m+1}\theta \cos^{2n+3}\theta d\theta = \frac{m}{2n+m+4}\int_0^{\pi/2} \sin^{m-1}\theta \cos^{2n+3}\theta d\theta, \ (m > 0).$$

6. Obliczyć całke
$$\int_0^{\pi/2} \frac{J_1^2(ka\sin\theta)}{(ka\sin\theta)^2} \sin\theta d\theta$$
i wykazać, że
$$2\int_0^{\pi/2} \frac{J_1^2(z\sin\theta)}{\sin\theta} d\theta = 1 - \frac{J_1(2z)}{z}.$$

Użyć szeregu:

$$J_n^2(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (2n+2r)!(z/2)^{2n+2r}}{r!(2n+r)![(n+r)!]^2}.$$

7. Obliczyć całkę $\int_0^z J_0(z)dz$.

Funkcje kuliste = harmoniki sferyczne.

1. Udowodnić zależność $Y_{lm}(\pi-\theta,\pi+\phi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta,\phi)$.

2. Udowodnić relację $Y_{l-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{lm}(\theta,\phi)$ wykorzystując zależność
$$P_{lm}(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{l-m)!} P_{l-m}(x).$$

3. Pokazać, że z rekurencji
$$P_{lm}(x) = \frac{-1}{(l+m+1)(l-m)} \left[-(1-x^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} + (m+1)\frac{x}{(1-x^2)^{1/2}} \right] P_{lm+1}(x)$$
wynika wyrażenie na stowarzyszone wielomiany Legendre'a
$$P_{lm}(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (1-x^2)^{-m/2} \frac{\partial^{l-m}}{\partial x^{l-m}} (x^2-1)^l,$$
a następnie sprawdzić relację
$$P_{lm}(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_{lm}(x).$$