1. Przybliżenie WKB (Wentzel, Krammers, Brillouin)

1.1. W obszarze dostępnym klasycznie funkcja falowa cząstki o masie μ w przybliżeniu kwaziklasycznym ma postać

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{p}} \sin\left(\int_{x_1}^{x_2} k(x)dx + \frac{\pi}{4}\right),$$

gdzie $k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(x)), \quad p = \hbar k.$

Obliczyć stałą normalizacyjną A.

1.2. Wyznaczyć w przybliżeniu kwazilkasycznym poziomy energetyczne cząstki o masie μ poruszającej się w polu siły o potencjale

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ kx, & x \geq 0, k > 0. \end{cases}$$

1.3. Znaleźć w przybliżeniu kwazilkasycznym poziomy energetyczne cząstki o masie μ poruszającej się w polu siły o potencjale

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{V_0}{a}x - V_0, & -a < x < 0 \\ \frac{V_0}{a}x - V_0, & 0 < x < a. \end{cases}$$

1.4. Znaleźć w przybliżeniu kwazilkasycznym poziomy energetyczne cząstki o masie μ poruszającej się w polu siły o potencjale

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < -a \\ -V_0(1 - x^2/a^2), & -a < x < a \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

1.5. Znaleźć w przybliżeniu kwazilkasycznym poziomy energetyczne cząstki o masie μ poruszającej się w polu siły o potencjale

$$V(x) = V_0 ctg^2 \frac{\pi x}{a}, \quad 0 < x < a.$$

Przedyskutować fizyczne znaczenie przejść granicznych

a) $V_0 \to 0$,

b) $V_0, a \to \infty$ tak, że $V_0/a^2 = const.$

1.6. Znaleźć w przybliżeniu kwazilkasycznym poziomy energetyczne cząstki o masie μ poruszającej się w polu siły o potencjale

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(x/a)}.$$

1.7. Znaleźć w przybliżeniu kwazilkasycznym poziomy energetyczne cząstki o masie μ poruszającej się w polu siły o potencjale

$$V(x) = \frac{V_0}{\cos^2(x/a)}.$$

1.8. Znaleźć w przybliżeniu kwazilkasycznym poziomy energetyczne cząstki o masie μ poruszającej się w polu siły o potencjale

$$V(x) = \frac{\mu\omega^2 x^2}{2}.$$

2. Rachunek zaburzeń zależny od czasu.

2.1. Pokazać, że zaburzenie włączane bardzo wolno do pewnej stałej wartości daje to samo wyrażenie na współczynniki rozwinięcia funkcji falowej, jak otrzymane przy zaburzeniu niezależnym od czasu.

2.2. Pole elektryczne jest zwiększane liniowo (od zera) w kierunku osi z. Jakie jest prawdopodobieństwo, że elektron atomu wodoru, znajdujący się początkowo w stanie podstawowym, znajdzie się na orbitalu $2p_z$ w chwili t.

2.3. Pole elektryczne jest powoli zwiększane wykładniczo (od zera) w kierunku osi z, a po długim czasie powoli zmniejszane także wykładniczo. Oblicz prawdopodobieństwo po wygaśnięciu perturbacji, że elektron atomu wodoru, znajdujący się początkowo w stanie podstawowym, znajdzie się na orbitalu $2p_z$.

Wskazówka. $H^{(1)} \sim 1 - e^{-kt}$ dla $0 \leq t \leq T$; $H^{(1)} \sim e^{-k(t-T)}$ dla $t \geq T$. Zinterpretuj "powoli"jako $k \ll \omega$ a "po długim czasie"jako $kT \gg 1$ oraz $k(t-T) \gg 1$.

3. Ewolucja układów kwantowych.

3.1. Znaleźć ewolucję czasową stanów czystych i mieszanych, jeżeli hamiltonian ukladu ma postać $H = \alpha P$, gdzie α jest stałą o wymiarze energii a P operatorem rzutowym.

3.2 Udowodnić, że w potencjale oscylatora harmonicznego każdy pakiet falowy po pewnym czasie powraca do stanu wyjściowego. Wyznaczyć ten czas.

3.3 W obrazie Heisenberga znaleźć operatory $x(t)$ i $p(t)$ dla a) ruchu swobidnego, b) pod wpływem siły $V = -Fx$. Podać wynik w przedstawieniu położeniowym. Obliczyć komutatory $[x(t), x(t')]$, $[x(t), p(t')]$, $[p(t), p(t')]$.